



# Dynamique et stabilité de fronts : phénomènes agéostrophiques

Hélène Scolan

## ► To cite this version:

Hélène Scolan. Dynamique et stabilité de fronts : phénomènes agéostrophiques. Sciences de la Terre. Université de Grenoble, 2011. Français. NNT : 2011GRENU039 . tel-01128054

**HAL Id: tel-01128054**

**<https://theses.hal.science/tel-01128054>**

Submitted on 9 Mar 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE**

Spécialité : **Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement**

Présentée par

**Hélène SCOLAN**

Thèse dirigée par **Jan-Bert FLÓR**

préparée au sein du **Laboratoire des Écoulements Géophysiques et Industriels, CNRS/UJF/Grenoble-INP**  
et de l'**École Doctorale Terre, Univers, Environnement**

## Dynamique et stabilité de fronts : phénomènes agéostrophiques

Thèse soutenue publiquement le **16 décembre 2011**,  
devant le jury composé de :

**Jean-Marc Chomaz** ..... Président  
*Directeur de recherche - LadHyx - Paris*

**Olivier Eiff** ..... Rapporteur  
*Professeur INPT - IMFT - Toulouse*

**Riwal Plougonven** ..... Rapporteur  
*Maître de conférences - LMD-ENS - Paris*

**Yves Morel** ..... Examineur  
*Directeur de recherche - LEGOS SHOM - Toulouse*

**David. G. Dritschel** ..... Examineur  
*Professor - Department of Applied Mathematics School of Mathematics and Statistics - University of St Andrews - Scotland*

**Jan-Bert Flór** ..... Directeur de thèse  
*Directeur de recherche - LEGI - Grenoble*





# Remerciements

Je remercie tout d'abord le jury d'avoir accepté d'évaluer mon travail de thèse notamment les rapporteurs, Riwal Plougonven et Olivier Eiff et l'ensemble des examinateurs.

Je remercie ensuite Jan-Bert Flór pour son encadrement dynamique pendant ces trois années. Il a su me guider tout en accordant confiance et liberté et me faire partager ses connaissances tant expérimentales que théoriques.

Je remercie particulièrement Roberto Verzicco qui a accepté un travail collaboratif et fournit le code numérique qui m'a permis une nouvelle exploration des instabilités étudiées expérimentalement. Je le remercie aussi pour sa disponibilité concernant mes questions techniques sur le numérique.

Je tiens également à remercier toute l'équipe de Coriolis (Joel Sommeria, Louis Gostiaux, Samuel Viboud et Henri Didelle) pour leur accueil, leur enthousiasme et leurs conseils et de manière générale toute l'équipe Environnement Rotation Et Stratification. Je retiendrai aussi de mon passage à Coriolis une grande richesse d'échanges avec des chercheurs invités venus du monde entier.

Je remercie aussi grandement Jonathan Gula pour sa collaboration, ses calculs de stabilité linéaire adaptés et la richesse des nombreuses discussions échangées avec lui.

Un grand merci à l'ensemble des membres du pool technique du LEGI pour toute leur aide apportée au niveau de la manip située au campus et leur conseils. Je n'oublie pas Francois Bonnel pour son aide dans le domaine de l'optique et de la visualisation.

J'ai eu aussi la chance de participer au programme "Geophysical Fluid Dynamics (WHOI)" à Woods Hole durant ma thèse. J'en suis aussi très reconnaissante envers les organisateurs (Oliver Bühler et Karl Helfrich) et je remercie Harvey Segur et Roger Grimshaw pour leurs enseignements sur les ondes nonlinéaires ainsi que Neil Balmforth pour la formidable expérience de recherche partagée avec lui au cours de mon projet. Ce fut une excellente expérience riche de réflexions et rencontres.

Le déroulement de la thèse aurait été différent sans la bonne humeur de l'ensemble des doctorants et post-doc du bâtiment G :Ulrich Soupremanien, Sylvain Marty, Nicolas Hérénger, Johannes Theisen , Martin Obligado, Corinne Durand, Manuel Medrano-Munoz, Matias Duran-Matute, Emilie Scherer et les nombreux stagiaires en particulier Ricardo de Socio, Jon Urteaga et Lionel Hirschberg qui ont contribué à un enrichissement culturel quotidien.

Enfin je ne saurais oublier un grand merci à ma famille et bien sûr Julien.



---

## Résumé

---

Cette thèse s'inscrit dans un contexte d'étude de la dynamique des fronts atmosphériques et océaniques et de l'origine des ondes de gravité dans l'atmosphère. Pour cela on s'intéresse à un front composé de deux couches de fluides miscibles en milieu tournant et soumis à un cisaillement vertical.

Un travail à la fois expérimental et numérique met en évidence des phénomènes agéostrophiques qui vont au-delà de la configuration équilibrée usuelle d'un front barocline. D'abord, l'étude des différents régimes instables d'un front en configuration annulaire en terme de nombre de Rossby et de Burger révèle une instabilité agéostrophique couplant des mouvements équilibrés et divergents grâce à la résonance entre une onde de Rossby et une onde de Kelvin. Cette instabilité Rossby-Kelvin a été confirmée numériquement grâce aux structures des perturbations en champs de vitesse dans chaque couche. Ensuite, des structures de petite échelle présentes sur le front ont aussi été observées expérimentalement. Les caractéristiques de l'interface en terme de nombre de Richardson et épaisseurs de l'interface en vitesse et en densité suggère une instabilité de cisaillement de Hölmboe. Une simulation directe numérique axisymétrique avec un nombre de Schmidt valant 700 confirme cette conjecture. Des ondes inertie-gravité supplémentaires sont observées numériquement sur un mode instable Rossby-Kelvin et le mécanisme de génération de ces ondes est discuté.

Enfin l'étude numérique d'un front stable a mis en évidence la présence de couches d'Ekman internes avec une structure additionnelle pour des valeurs élevées de nombre de Schmidt et un faible nombre de Rossby.

Dans le cas de front en in/outcropping, la dynamique est modifiée par l'interaction du front avec les couches d'Ekman au niveau du point singulier d'épaisseur nulle. Elle dépend à la fois de la circulation verticale et du mélange sur le nez du front et des nombreuses instabilités possibles associées à des résonances d'ondes horizontalement et verticalement.

### Mots-clés :

instabilité agéostrophique, onde de Rossby, onde de Kelvin, résonance d'ondes, instabilité de Hölmboe, couches d'Ekman et de Stewartson.

---

## Abstract

---

This thesis has to be seen within the general study of atmospheric and oceanic fronts and the origin of gravity waves in the atmosphere. In this context we focus on a front in a rotating two-layer miscible fluid under vertical shear. Both experimental and numerical study highlights ageostrophic phenomena going beyond the usual geostrophic equilibrated configuration of a baroclinic front. First, the classification of different instability regimes of a front in an annular configuration as a function of Rossby number and Burger number reveals an ageostrophic instability coupling equilibrated and divergent motions due to a resonance between a Rossby wave and a Kelvin wave. This Rossby-Kelvin instability is confirmed numerically by the structure of the perturbation velocity fields in each layer. Second, small-scale structures have also been observed experimentally. Characteristics of the interface as a function of Richardson number and density and velocity interface thicknesses suggests the presence of the Hölmboe shear instability. A direct numerical simulation with an axisymmetric configuration and with a Schmidt number 700 confirms this conjecture. Other small-scale perturbations compatible with inertia-gravity waves have been observed numerically superimposed on an unstable Rossby-Kelvin front and the wave generation mechanism is discussed.

In addition, a numerical study of a stable front highlighted the presence of internal Ekman layers with an additional interfacial structure in the case of high Schmidt number and small Rossby number.

For fronts in in/outcropping, front dynamics is modified by the interaction with Ekman boundary layer at the location of the intersection zero-thickness singular point. It depends on both vertical circulation and mixing on the nose of the front and the various possible instabilities associated to horizontal or vertical wave resonances.

**Key-words :** ageostrophic instability, Rossby waves, Kelvin waves, wave resonance, Hölmboe shear instability, internal Ekman layers, Stewartson layer.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>iii</b>
<b>Résumé</b>	<b>v</b>
<b>Table des matières</b>	<b>vii</b>
<b>1. Introduction</b>	<b>1</b>
1.1. Généralités sur les écoulements géophysiques - rotation, stratification . . . . .	1
1.2. Fronts dans l'atmosphère et l'océan . . . . .	2
1.3. Approche de la thèse. . . . .	4
<b>2. Modélisation des fronts</b>	<b>5</b>
2.1. Premières expériences de fronts . . . . .	5
2.1.1. Anneau tournant soumis à un gradient de température . . . . .	5
2.1.2. Fronts entre deux couches immiscibles en rotation différentielle . . . . .	6
2.2. Modèle de front en milieu bicouche tournant. . . . .	7
2.2.1. Equations de Navier-Stokes en milieu stratifié tournant . . . . .	8
2.2.2. Adimensionalisation et nombres sans dimension . . . . .	9
2.2.3. Utilisation pratique . . . . .	11
2.3. Couches d'Ekman . . . . .	12
<b>3. Physique générale des fronts</b>	<b>15</b>
3.1. Vorticité potentielle . . . . .	15
3.2. Rappels sur les ondes en milieu tournant . . . . .	16
3.2.1. Ondes de Rossby . . . . .	16
3.2.2. Ondes d'inertie gravité (ou Poincaré) . . . . .	17
3.2.3. Mode de Kelvin : présence d'une paroi latérale . . . . .	18
3.2.4. Mode frontal . . . . .	19
3.3. Instabilité en milieu stratifié tournant . . . . .	19
3.3.1. Instabilité centrifuge . . . . .	19
3.3.2. Instabilités d'un écoulement quasi-géostrophique . . . . .	20
<b>4. Instabilités agéostrophiques : état de l'art</b>	<b>25</b>
4.1. Instabilité comme résonance d'ondes . . . . .	25
4.1.1. Condition de résonance . . . . .	26

4.1.2. Critère général d'instabilité de Ripa (1991) . . . . .	28
4.2. Instabilités agéostrophiques : instabilité de Rossby-Kelvin . . . .	29
4.3. Travaux expérimentaux antérieurs . . . . .	30
4.4. Perturbations de petite échelle . . . . .	33
4.4.1. Instabilité de cisaillement en présence de stratification : Théorie de Hölmböe . . . . .	34
4.4.2. Ondes inertie-gravité spontanément émises . . . . .	41
<b>5. Outils expérimentaux et numériques</b>	<b>47</b>
5.1. Dispositif expérimental . . . . .	47
5.1.1. Montage expérimental . . . . .	47
5.1.2. Milieu bicouche . . . . .	48
5.1.3. Techniques de visualisation . . . . .	50
5.2. Modélisation numérique . . . . .	53
5.3. Traitement et analyse d'images . . . . .	54
5.4. Confrontation aux calculs de stabilité linéaire . . . . .	56
<b>6. On density interfaces in rotating fluids</b>	<b>59</b>
6.1. Introduction . . . . .	59
6.2. Governing equations and numerical methods . . . . .	60
6.3. Numerical and experimental results . . . . .	62
6.3.1. Azimuthal velocity profiles in stable regime . . . . .	62
6.3.2. Axisymmetric flow : meridional characteristics of the flow	62
6.3.3. Interfacial Ekman layers . . . . .	65
6.4. Conclusions . . . . .	66
<b>7. Frontal instabilities and waves in a differentially rotating fluid</b>	<b>69</b>
7.1. Introduction . . . . .	69
7.2. Experimental setup and flow parameters . . . . .	72
7.3. Frontal instabilities . . . . .	73
7.4. Rossby-Kelvin instability . . . . .	75
7.5. Short scale waves . . . . .	79
7.6. Nonlinear features . . . . .	81
7.7. Conclusions and discussion . . . . .	83
<b>8. Phénomènes agéostrophiques : étude numérique</b>	<b>85</b>
8.1. Introduction . . . . .	85
8.2. Governing equations and numerical methods . . . . .	86
8.3. Instabilities with large wavenumber . . . . .	96
8.3.1. Exploration of the diagram . . . . .	96
8.3.2. Instability criteria . . . . .	96
8.3.3. Evidence of Rossby-Kelvin Instability . . . . .	98
8.4. Small-scale perturbations . . . . .	100
8.4.1. Stratified shear instabilities . . . . .	102

8.4.2. Shear instabilities in the initial time of a simulation with $Sc=700$ - Comparison with experimental Hölmböe waves	108
8.4.3. Inertia-gravity waves	110
8.5. Conclusion	114
<b>9. Intersection d'un front d'un bicouche en rotation avec une limite horizontale</b>	<b>117</b>
9.1. Introduction	117
9.2. Configuration expérimentale et numérique	120
9.3. Premiers résultats	122
9.3.1. Cas a) intersection via les côtés de l'interface parabolique.	122
9.3.2. Cas b) : intersection du sommet de l'interface avec le disque.	127
9.3.3. Cas c) : intersection du sommet de l'interface avec le fond.	133
9.4. Dynamique latérale des fronts in/outcropping.	135
9.5. Conclusion	140
<b>10. Conclusion et perspectives</b>	<b>141</b>
<b>A. Annexe : Equilibre géostrophique et vent thermique</b>	<b>143</b>
<b>B. Annexe : Etude du rôle des couches latérales</b>	<b>145</b>
B.1. Introduction	145
B.2. Torque balance for the one-layer annulus	148
B.2.1. Neglecting the Stewartson layers	149
B.2.2. Including the Stewartson layers	150
B.3. Torque balance for the two-layer annulus	152
B.4. Laboratory experiments	154
B.4.1. One-layer cylinder experiment	154
B.4.2. Two-layer annulus experiments	157
B.5. Summary and discussion	165
<b>Bibliographie</b>	<b>167</b>



# 1. Introduction

## 1.1. Généralités sur les écoulements géophysiques - rotation, stratification

Les écoulements géophysiques dans l'atmosphère et dans les océans sont des écoulements à grande échelle, stratifiés (en température ou/et salinité) et soumis à la rotation de la Terre.

Celle-ci devient importante quand l'échelle de temps d'un phénomène donné  $T$  devient de l'ordre de grandeur du temps de révolution terrestre  $T_{\text{Terre}}$ . Le paramètre associé appelé le nombre de Rossby  $R_o$  vérifie alors :

$$R_o = \frac{T_{\text{Terre}}}{T} = \frac{U}{2\Omega L} \leq 1$$

où  $U$  et  $L$  sont les vitesses caractéristiques de l'écoulement et  $\Omega$  la vitesse de rotation de la Terre .

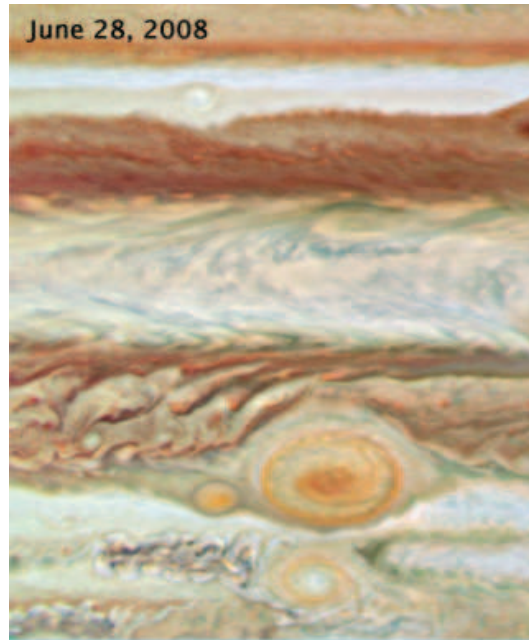
De même, évaluer l'importance de la stratification conduit à comparer l'échelle de longueur  $L$  mise en jeu à une échelle caractéristique  $R_d$ , appelé rayon de déformation ou rayon de Rossby. La stratification est associée à une variation de densité  $\rho(T, S)$  qui dépend de la température et de la salinité. On peut construire le rayon de Rossby qui dépendant de la structure verticale en densité de l'écoulement, de son épaisseur  $H$  et de  $\Omega$  :

$$R_d = \frac{1}{2\Omega} \sqrt{\frac{\Delta\rho}{\rho} g H}$$

- Si  $R_d \gg L$  la rotation pourra être négligée devant les effets de la stratification.
- Si  $L \geq R_d$ , on doit tenir compte des effets combinés de la stratification et de la rotation pour décrire la dynamique de l'écoulement.

La figure (1.1) présente un exemple d'écoulement à grande échelle atmosphérique sur Jupiter où la force de Coriolis doit être pris en compte ainsi que la stratification.



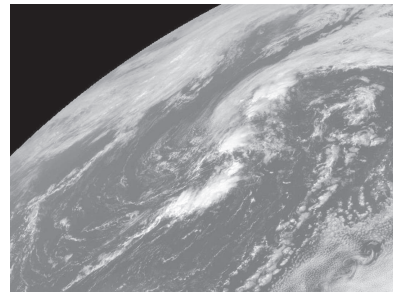
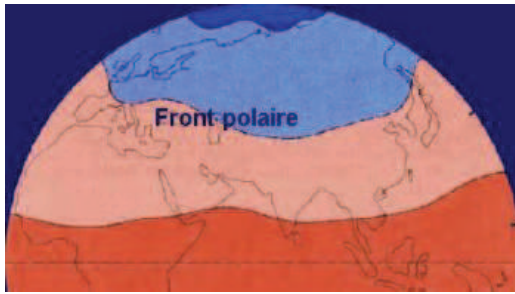


**Fig 1.1.:** *Tache rouge de Jupiter vue par Hubble Space Télescope WFPC2 :  $R \approx 10000$  km et  $R_d \approx 2500$  km (NASA, ESA, A. Simon-Miller (Goddard Space Flight Center), N. Chanover (New Mexico State University), et G. Orton (Jet Propulsion Laboratory))*

## 1.2. Fronts dans l'atmosphère et l'océan

De façon générale, les fronts sont des barrières naturelles dans l'océan ou l'atmosphère qui bloquent le transport des quantités physiques (masse, énergie, constituants biologiques et chimiques). Par exemple, un front peut séparer les masses d'airs ou d'eau froides de celles plus chaudes comme le front polaire (figure 1.2). De façon générale, un front est une zone comportant un très fort gradient de densité ou de température, et de vitesse. Son énergie potentielle peut être relâchée sous forme de tourbillons à toutes les échelles qui le déstabilisent et augmentent le cisaillement à travers le front.

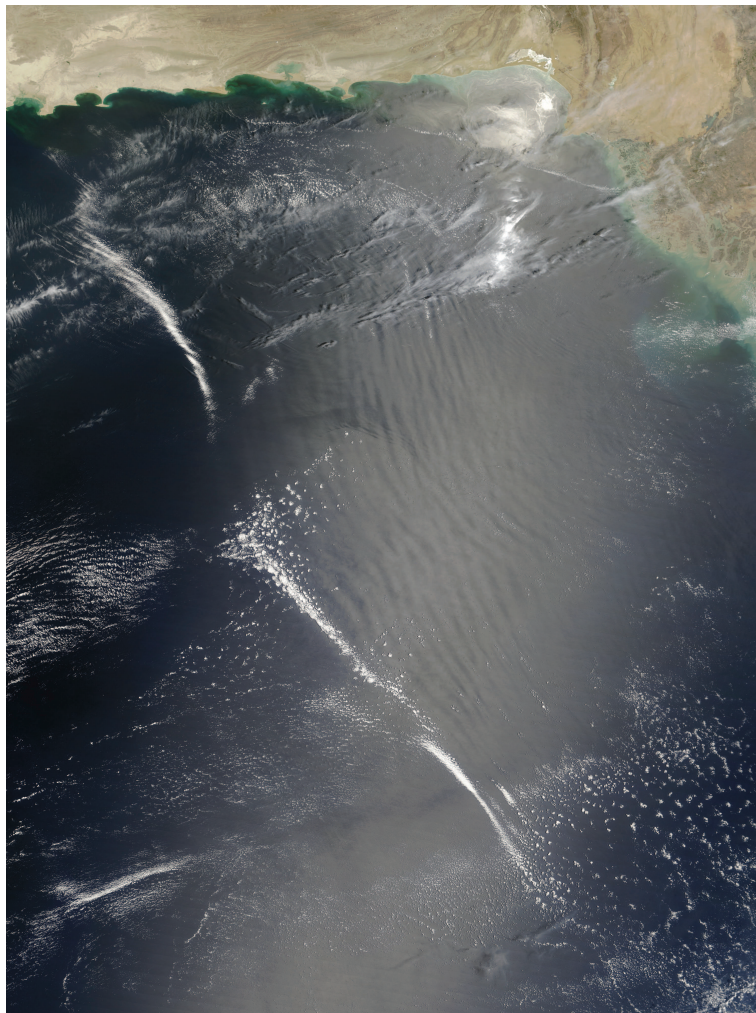
La compréhension des écoulements océaniques ou atmosphériques repose principalement sur des modèles décrivant seulement les mouvements proches de l'équilibre dit géostrophique, équilibre entre le gradient horizontal de pression et la force de Coriolis (voir annexe A). Ainsi le modèle équilibré quasi-géostrophique, obtenu pour des nombres de Rossby faibles suffit pour comprendre les *mouvements équilibrés* ou phénomènes à grande échelle et d'évolution lente mais filtre des phénomènes de plus petite échelles et rapides comme les *ondes inertie-gravité* illustrées figure 1.3.



Le front polaire sépare l'air polaire et l'air tropical

Perturbation dans la zone du front polaire

**Fig 1.2.:** Schéma a) (source : [http://www.meteocom.ch/new/Images-INI/07\\_Masses-air-F%20J.jpg](http://www.meteocom.ch/new/Images-INI/07_Masses-air-F%20J.jpg) ) et image satellite b) d'une dépression sur le front polaire avec une circulation cyclonique en sens antihoraire. (source : <http://www.wmo.ch>)



**Fig 1.3.:** Ondes de gravité atmosphériques au dessus de la mer Arabe dans l'océan indien : les lignes sombres correspondent aux creux de l'onde de gravité là où l'air a touché et déformé la surface de l'océan et les lignes lumineuses révèlent les crêtes de l'onde de gravité atmosphérique et correspondent à la lumière directement réfléchiée vers le satellite par l'eau calme située sous la crête. (Jeff Schmaltz Nasa Terra/MODIS - 2005)

Ces ondes inertie-gravité, mouvements dits non équilibrés sont pourtant importants dans la moyenne-atmosphère (Fritts et Alexander, 2003) et connaître la dynamique des fronts à petite échelle spatiale et temporelle et l'intégrer aux modèles pourrait par exemple rendre possible une meilleure prévision des écoulements géophysiques.

A faible nombre de Rossby, la séparation existant entre les échelles de temps des mouvements équilibrés et des ondes inertie-gravité induit généralement un découplage des deux types de phénomènes (Reznik *et al.*, 2001). Cependant, des observations (Uccellini et Koch, 1987; Pavelin *et al.*, 2001) ont mis en évidence la présence d'ondes intenses au voisinage de jets et de fronts et en particulier dans des régions de sorties de jets. L'explication des mécanismes d'émission de telles ondes est délicate car ces phénomènes se situent hors du cadre traditionnel d'ajustement géostrophique puisque l'excitation de ces ondes inertie-gravité apparaît à partir de mouvements initialement équilibrés. On parle d'émission spontanée et des mécanismes différents (radiation de Lighthill, capture d'ondes) ont été identifiés selon les cas.

D'autre part, des études de stabilité linéaire et numérique d'écoulements cisailés de Sakai (1989) et Gula *et al.* (2009a,b) ont montré la possibilité, grâce au décalage doppler d'interaction entre les mouvements équilibrés et les ondes inertie-gravité sous forme d'instabilités agéostrophiques. En particulier, ils ont mis en évidence une instabilité Rossby-Kelvin couplant une onde de Rossby et onde de Kelvin.

### 1.3. Approche de la thèse.

L'objectif principal de la thèse est d'explorer ces phénomènes agéostrophiques (instabilités et ondes) expérimentalement à l'aide d'un fluide-bicouche en milieu tournant. Ces résultats expérimentaux seront confrontés aux analyses de stabilité linéaire (Gula *et al.* (2009b)). En outre, une étude basée sur une simulation numérique directe menée en parallèle permet de continuer en comparant ces résultats expérimentaux aux données numériques. Le chapitre 2 est consacré à l'introduction du système modèle utilisé et aux nombres sans dimension associés tandis que les chapitres 3 et 4 décrivent la physique des fronts nécessaires pour comprendre les résultats qui seront présentés principalement sous forme d'articles publiés ou en préparation pour publication. Le chapitre 5 présente les outils expérimentaux et numériques employés au cours de la thèse. La partie 6 est une étude numérique qui s'écarte un peu du thème principal des instabilités pour s'attacher à l'exploration de la circulation secondaire et l'existence de couches d'Ekman internes pour le fluide bicouche en configuration stable. Le chapitre 7 présente les résultats expérimentaux obtenus pour l'expérience en configuration annulaire et le chapitre 8 poursuit cette étude de manière numérique. La partie 9 montre les résultats expérimentaux et numériques préliminaires obtenus dans le cas d'une intersection d'un front avec une surface horizontale.

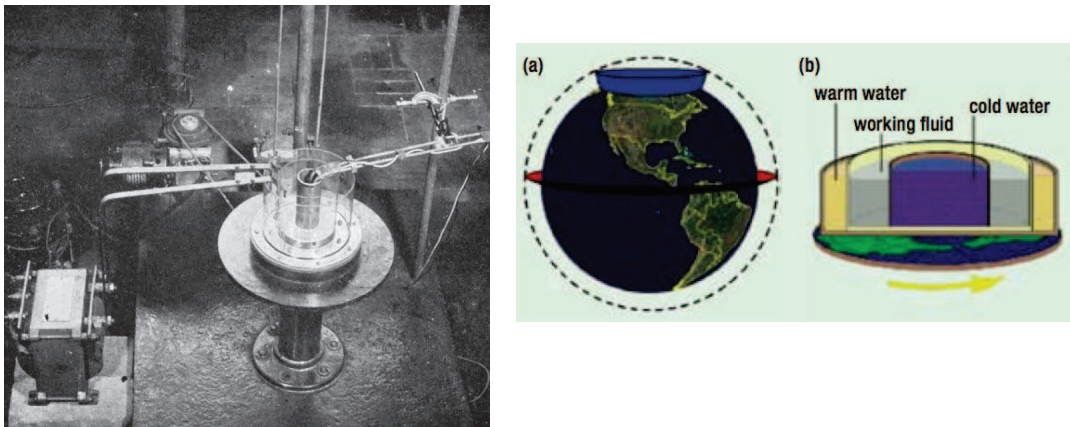
## 2. Modélisation des fronts

### 2.1. Premières expériences de fronts

#### 2.1.1. Anneau tournant soumis à un gradient de température

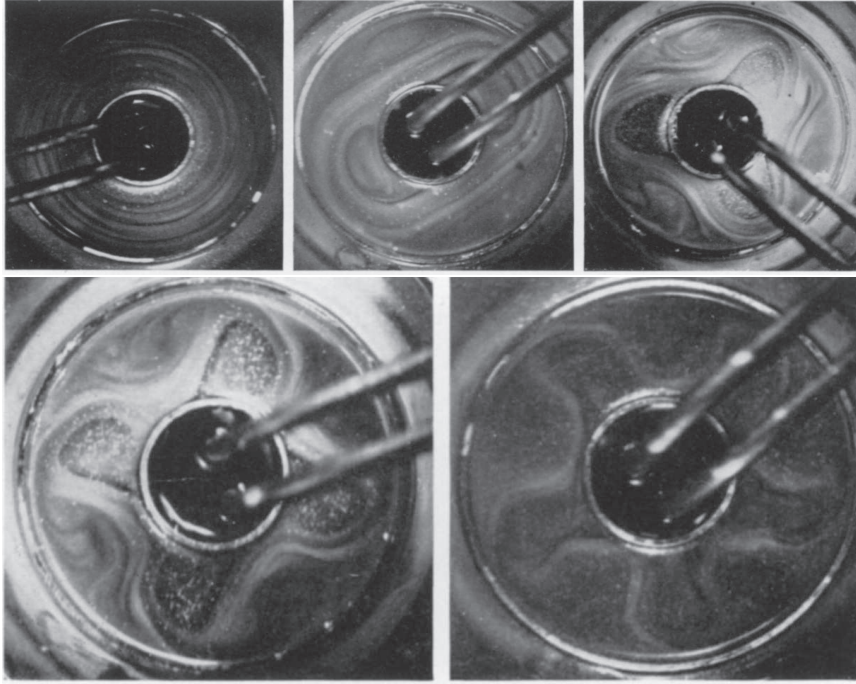
Les premières expériences ont été menées par [Hide \(1953, 1958\)](#) et [Fultz \*et al.\* \(1959\)](#) ou encore [Fowles \(1965\)](#). L'atmosphère terrestre est modélisée en laboratoire par un système de trois anneaux concentriques (figure 2.1) : le cylindre central contient de l'eau froide (pôle) et la couronne extérieure contient de l'eau chaude (équateur). L'anneau intermédiaire contient le fluide qui modélise l'atmosphère.

Ces expériences mettent en jeu une instabilité dite barocline sous forme de convection latérale qui induit la mise en place d'un front avec des modes réguliers à partir de l'état de base axisymétrique (figure 2.2). La similarité de ces motifs avec les écoulements atmosphériques a motivé d'autres expériences avec ce même type dispositif ou des dispositifs alternatifs où le chauffage est inversé et donc effectué par le centre plutôt que par les murs latéraux (see [Hide et Mason \(1970\)](#); [Hide \*et al.\* \(1994\)](#); [Bastin et Read \(1997\)](#))



**Fig 2.1.:** *Gauche : Dispositif expérimental ([Hide \(1958\)](#)) Droite : Modélisation de l'atmosphère terrestre en anneau tournant avec un gradient de température créée en plaçant des sources d'eau chaude et froide autour du fluide annulaire. (schéma extrait de [Ghil et al. \(2010\)](#))*



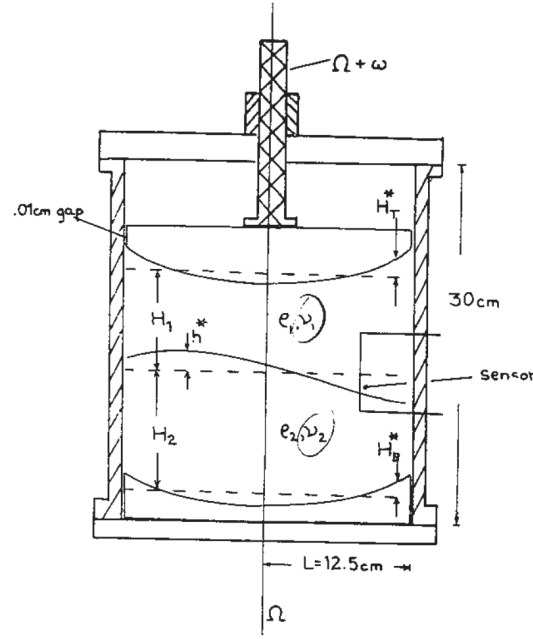


**Fig 2.2.:** Développement de modes réguliers baroclines à partir de l'écoulement axisymétrique (*Hide (1958)*)

En plus du régime nonaxisymétrique régulier, l'écoulement présente un régime axisymétrique et irrégulier et la transition entre les deux régimes fait apparaître des phénomènes non-linéaires dit de vacillation (d'amplitude ou d'onde) qui sont des modulations périodiques de plusieurs type (forme entière, amplitude ..). L'évolution dynamique du système jusqu'au chaos et le régime de turbulence géostrophique est alors étudié en profondeur (*Read et al. (1992)*, *Früh et Read (1997)*, *Eccles et al. (2009)*)

### 2.1.2. Fronts entre deux couches immiscibles en rotation différentielle

Dans le but de comprendre la dynamique de l'instabilité barocline en elle-même, *Hart (1972)* propose une expérience en configuration cylindrique et en rotation où le gradient de température est remplacé par un gradient de salinité entre deux couches en utilisant de l'huile de silicone et une solution salée additionnée d'alcool. Un cisaillement vertical est exercé par un disque en rotation différentielle par rapport à la cuve (figure(2.3)). L'avantage d'une telle expérience est que le forçage est bien mieux contrôlé. Le but est de tester en laboratoire les résultats du modèle quasi-géostrophique à deux couches de *Phillips (1954)* (voir section) et *Pedlosky (1964, 1970)*). Il montre un très bon accord entre la limite de stabilité théorique et les points expérimentaux et met en évidence des

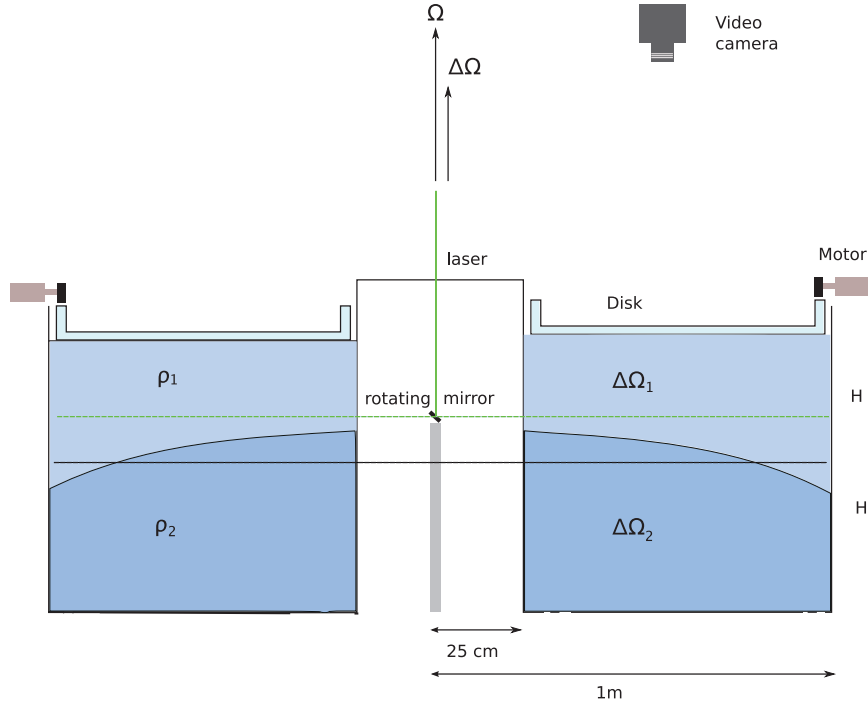


**Fig 2.3.:** Schéma du système à deux couches avec cisaillement exercé par un disque en rotation différentielle. (Extrait de [Hart \(1972\)](#))

phénomènes de modulation d'amplitude du front ou *amplitude vacillation* selon la dissipation dans le système [Hart \(1980, 1985\)](#) et s'intéresse aux effets de la topographie (effet beta [Ohlsen et Hart \(1989\)](#)). [King \(1979\)](#), [Bradford et al. \(1981\)](#) [Appleby \(1982\)](#) puis [Lovegrove et al. \(2000\)](#) et [Williams \(2003\)](#); [Williams et al. \(2004b,a, 2005\)](#) reprennent le même type d'expériences en configuration annulaire et effectuent des mesures optiques non intrusives de l'écoulement à l'aide des propriétés de polarisation d'une des couches contenant du limonène, un colorant optiquement actif. En plus des interactions non-linéaires et des phénomènes de vacillation ils mettent en évidence la présence d'activité ondulatoire de grandes fréquences évoquées par [Read et al. \(1992\)](#).

## 2.2. Modèle de front en milieu bicouche tournant.

Dans cette étude, nous allons reprendre cette configuration expérimentale annulaire à deux couches avec un disque à la surface induisant une rotation différentielle  $\Delta\Omega$  par rapport à la rotation de base  $\Omega$  (figure 2.4). Cependant, le rapport d'aspect de la cuve est différent des expériences antérieures puisque la partie annulaire est de 74cm pour une couche totale d'eau de 26cm ce qui permet une grande gamme d'échelle alors que [Williams et al. \(2005\)](#) ont effectué leurs expériences dans une cuve d'entrefer annulaire de 6.25cm pour une hauteur d'eau de 12.5cm. De plus, on explore ici la dynamique du front en utilisant



**Fig 2.4.:** *Modélisation du front par deux couches d'eau de salinité différente. La ligne noire indique l'inclinaison parabolique de l'interface qui se met en place quand le disque placé au dessus des deux couches tourne dans le même sens que la rotation de base (sens cyclonique). La ligne noire indique l'interface au repos. La ligne verte indique le chemin du faisceau laser. Les rotations différentielles  $\Delta\Omega$ ,  $\Delta\Omega_1$  et  $\Delta\Omega_2$  sont définies dans le référentiel tournant à  $\Omega$ .*

deux couches miscibles (eaux salées de différente salinité). Cela autorise le mélange entre les deux couches, correspond à une interface plus réaliste que dans le cas de couches immiscibles et peut modifier les propriétés de la vorticité potentielle dans chaque couche. Les instabilités et les ondes possibles à l'interface (ondes inertie-gravité, instabilité de Kelvin-Helmholtz ou d'Hölmboë) ont aussi un comportement différent par rapport à celles associées à une interface en saut de densité. L'inconvénient de l'utilisation de couches miscibles est néanmoins le caractère transitoire des expériences et le mélange progressif entre les deux couches. Néanmoins, tant qu'il n'y a pas d'intersection du front avec le disque ou le fond, le mélange reste limité et l'approximation bi-couche reste valable.

La section suivante présente la mise en équation du système considéré.

### 2.2.1. Equations de Navier-Stokes en milieu stratifié tournant

Les équations générales mise en jeu sont alors les équations de Navier-Stokes en milieu stratifié tournant :

- la conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v} + \rho \Omega^2 r \hat{r} \quad (2.1)$$

où l'on a ajouté l'accélération de Coriolis à gauche et inséré aussi la force centrifuge. La force centrifuge étant une force conservative qui peut s'écrire sous forme de gradient, on pourrait l'inclure dans le terme de pression.

- l'équation de continuité (conservation de la masse)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.2)$$

- la conservation de la quantité de sel

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) S = \kappa \Delta S \quad (2.3)$$

où  $\kappa$  est la diffusivité et  $S$  la salinité.

La stratification apparait dans l'équation d'état pour la densité qui ferme le système :

$$\rho = \rho_o + \alpha S(z) \quad (2.4)$$

On ne considèrera pas ici la dépendance de la densité avec la température considérée constante et uniforme.

La stratification verticale permet d'introduire  $N$  la fréquence de Brunt-Väissälä vérifiant :

$$N^2 = -\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz}.$$

Elle correspond physiquement à la fréquence propre d'oscillation autour de son niveau d'équilibre d'une particule déplacée vers le haut dans une zone de densité plus faible : celle-ci subit une force vers le bas pour la ramener à son origine mais du fait de son inertie va se trouver plus bas dans une zone de densité plus grande et donc subir une force vers le haut et ainsi de suite... ce qui lui confère un mouvement oscillatoire.

### 2.2.2. Adimensionalisation et nombres sans dimension

Pour étudier expérimentalement et identifier les mécanismes d'instabilités de fronts, on considère le cas le plus simple d'un fluide à deux couches.

Comme la densité varie peu, on va faire l'approximation de Boussinesq et ne considérer la variation de la densité que dans le terme de gravité et le terme de force centrifuge. Les équations de Navier-Stokes deviennent alors :



$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_1} - 2\vec{\Omega} \times \vec{u} - g\frac{\rho - \rho_1}{\rho_1}\hat{\mathbf{z}} + \nu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\rho - \rho_1}{\rho_1}\Omega^2 r \hat{\mathbf{r}} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (S\vec{u}) = \kappa \nabla^2 S \quad (2.7)$$

with  $\rho = \rho_1 + \alpha S$  où  $S$  correspond à la salinité et  $\kappa$  la diffusivité de cette quantité scalaire.

De même que Hart (1972), on peut adimensionaliser les équations en se basant sur la vitesse du disque du dessus. On prendra donc  $T = \frac{1}{\Delta\Omega}$  pour l'échelle de temps,  $L = R_2 - R_1$  pour l'échelle de longueur dans le cas d'un anneau et  $L = R$  pour une configuration cylindrique,  $U = \Delta\Omega L$  pour l'échelle des vitesses,  $p = \rho_1 U^2$  pour l'échelle des pressions et  $\alpha S = \Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$  pour la concentration. En substituant ces échelles, on obtient :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\vec{\nabla} p - \frac{1}{R_o}\hat{\mathbf{k}} \times \vec{u} - \frac{B_u}{R_o^2 \frac{H}{L}} S \hat{\mathbf{z}} + \frac{1}{R_e} \nabla^2 \vec{u} + \frac{g'/g}{4R_o^2} S r \hat{\mathbf{r}} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (S\vec{u}) = \frac{1}{Pe} \nabla^2 S, \quad (2.9)$$

On voit ainsi apparaître plusieurs nombres sans dimensions contrôlant la dynamique du système :

- Le rapport des accélérations  $\Gamma = \frac{g'}{g} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}$  où  $g'$  est appelée gravité réduite : On a donc  $N^2 = -\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \approx \frac{g'}{H}$ .
- Le rapport d'aspect  $\gamma = H/L$  with  $H = H_{\text{réduit}} = \frac{2H_1 H_2}{H_1 + H_2}$  and  $L = R_2 - R_1$ .
- Le nombre de Schmidt  $Sc = \frac{\nu}{\kappa}$ . C'est le nombre de Schmidt qui compare les diffusivités de quantité de mouvement et de salinité. Il est de l'ordre de 700 pour la salinité. Au lieu du nombre de Schmidt on peut utiliser le nombre de Péclet  $Pe = \frac{\Delta\Omega L^2}{\kappa}$  qui vérifie  $Pe = Re \cdot Sc$ .
- Le nombre de Rossby :  $R_o = \frac{\text{terme de transport convectif}}{\text{force de Coriolis}} = \frac{U}{2\Omega L} = \frac{\Delta\Omega}{2\Omega}$  que l'on a déjà introduit en 1.
- Le nombre d'Ekman :  $E_k = \frac{\text{force visqueuse}}{\text{force de Coriolis}} = \frac{\nu}{2\Omega H^2}^*$

---

\*. Deux conventions sont communément utilisées pour le nombre d'Ekman avec ou non un 2 au dénominateur. Nous utilisons la convention avec le 2.

Quand  $E_k \ll 1$ , la dissipation visqueuse est négligeable devant la force de Coriolis. En pratique les effets de viscosité seront à prendre en compte uniquement dans les couches dites d'Ekman près des parois. On peut en effet construire une longueur  $d = \sqrt{\frac{\nu}{\Omega}}$  qui correspond à l'épaisseur de cette couche d'Ekman. Ici ce nombre apparaît via le *nombre de Reynolds* usuel  $Re = \frac{\text{terme non linéaire}}{\text{terme visqueux}} = \frac{UL}{\nu} = \frac{\Delta\Omega L^2}{\nu}$  qui peut s'exprimer en fonction

du  $R_o$  et de  $E_k$  et du rapport d'aspect  $H/L$  :  $R_e = \frac{R_o}{E_k} \left( \frac{L}{H} \right)^2$ .

- Le *nombre de Burger* apparaît dans une situation où rotation et stratification existent tous les deux. Il est une mesure de l'importance de la stratification par rapport à la rotation et le rapport d'aspect de la cuve.

$$B_u = \left( \frac{NH}{2\Omega L} \right)^2 = \frac{g'H}{4\Omega^2 L^2}.$$

On peut aussi l'écrire en faisant apparaître le *nombre de Froude*  $F_r$ . Ce nombre est une mesure du rôle de la stratification :  $F_r = \frac{U}{NH}$ .

En effet  $B_u = \left( \frac{R_o}{F_r} \right)^2$ .

Si  $F_r < 1$ , les effets de stratification sont importants. En fait, il y a une analogie entre  $(N, H)$  et  $(\Omega, L)$  de même qu'entre  $F_r$  et  $R_o$ .

Une forte stratification limite les déplacements verticaux : par exemple, un fluide arrivant sur un obstacle aura tendance à le contourner horizontalement plutôt que passer par dessus.

On peut aussi le réécrire en faisant intervenir le rayon de déformation de Rossby :  $Bu = \left( \frac{R_d}{L} \right)^2$  On retrouve le rapport entre  $R_d$  et une distance horizontale caractéristique  $L$  : si  $Bu \gg 1$  i.e.  $R_d \gg L$ , la rotation a des effets négligeables devant ceux de la stratification.

On peut voir que du fait de la stratification et de la rotation, les nombres sans dimension qui contrôlent le système sont au nombre de six. En réalité pour une configuration géométrique et une stratification choisie,  $Sc$ ,  $\Gamma$  et  $\gamma$  sont fixés et le système est donc contrôlé finalement par trois nombres sans dimension :  $(B_u, R_o, E_k)$ .

### 2.2.3. Utilisation pratique

En pratique pour les diagrammes expérimentaux, on utilise deux nombres sans dimensions alternatifs au nombre de Burger et au nombre d'Ekman. Ainsi on peut vouloir comme Williams *et al.* (2005) considérer plutôt l'inverse du Burger\* :

---

\*. il ne faut pas confondre  $F_r$  et  $\mathbf{F}$  :  $F_r$  dépend de  $U$  alors que ce n'est pas le cas de  $\mathbf{F}$ .

$$\mathbf{F} = \left( \frac{2\Omega L}{NH} \right)^2 = \frac{1}{B_u}$$

De même, pour comparaison avec des résultats antérieurs ([Hart \(1972\)](#), [Williams et al. \(2005\)](#)) on utilisera un nombre dit de dissipation qui compare le temps de forçage au temps de mise en rotation du fluide par le disque :

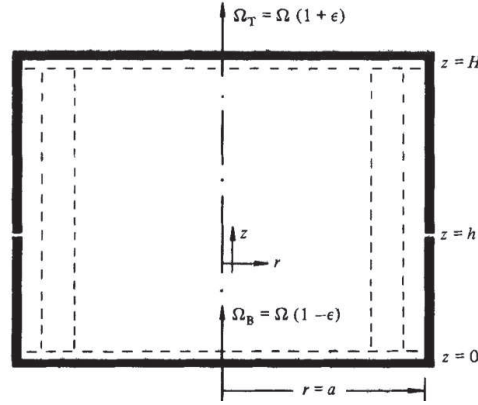
$$d = \frac{\tau_{\text{forçage}}}{\tau_{\text{spin-up}}} = \frac{\frac{1}{\omega_{\text{forçage}}}}{\frac{1}{\Omega\sqrt{2E}}}$$

Ici  $\omega_{\text{forçage}} = \Delta\Omega$  donc  $d = \frac{\frac{1}{\omega_{\text{forçage}}}}{\frac{H}{\sqrt{\nu\Omega}}} = \frac{\sqrt{\nu\Omega}}{H\Delta\Omega}$ . Plus  $d$  est grand et plus les effets visqueux dominent et annihilent de petites perturbations de l'écoulement. Ce n'est pas un nombre supplémentaire mais une autre façon d'écrire un nombre où apparaît la dissipation et on peut écrire  $d$  en fonction de Rossby et du nombre d'Ekman  $d = \frac{\sqrt{E_k}}{\sqrt{2}R_o}$ . On étudiera donc les différentes instabilités en balayant l'espace de paramètres  $(B_u \text{ (ou } \mathbf{F}), R_o, d)$ .<sup>†</sup>

## 2.3. Couches d'Ekman

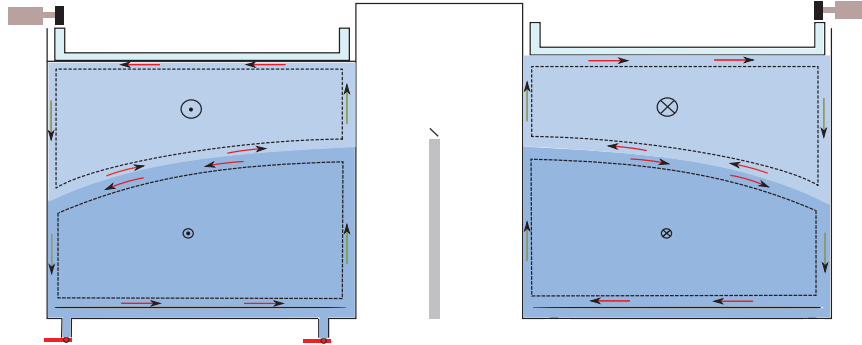
Si dans un régime stable le fluide à l'intérieur d'un cylindre tournant vérifie l'équilibre géostrophique, les conditions aux bords sans glissement et d'imperméabilité sont telles que près des parois cet équilibre n'est plus vérifié : la force de Coriolis devient du même ordre de grandeur que les effets visqueux i.e.  $E_k \approx 1$ . Pour un fluide homogène, il existe deux types de couches limites : les couches d'Ekman près des frontières horizontales (disque, fond de la cuve) de taille  $\delta_e \approx E^{1/2}$ , et les couches de Stewartson qui font la transition entre l'intérieur et les murs latéraux. Ces dernières se décomposent en fait en deux couches : une première couche de taille  $\delta \approx E^{1/4}$  permet l'égalité de la composante azimutale tangente de la vitesse et une deuxième couche de taille  $\delta \approx E^{1/3}$  grâce à laquelle il y a l'égalité de la composante verticale et de la composante de la vitesse normale au mur permet le flux vertical de masse entre les couches d'Ekman du haut et celle du bas. C'est en effet grâce à ces deux couches et à la mise en place d'un écoulement secondaire dans un plan méridional que va s'effectuer la mise en rotation du fluide.

<sup>†</sup>. On peut voir aussi apparaître dans la littérature le nombre dit de Grashof ([Hart, 1972](#))  $G_r = \frac{g'H^5}{\nu^2 L^2}$ . Nous ne l'utiliserons pas dans notre étude mais il est relié aux autres nombres par :  $G_r = \frac{B_u}{E_k^{3/2}}$  avec notre convention  $E_k = \frac{\nu}{2\Omega H^2}$ .



**Fig 2.5.:** Schéma des couches limites d'Ekman horizontales en haut et en bas et des deux couches de Stewartson verticales dans un fluide homogène en rotation (tiré de van Heijst (1983)).

Dans le cas d'un fluide composé de deux couches *immiscibles*, on sait que des couches d'Ekman internes exercent une friction à l'interface (Hart (1972), King (1979)) et que lors de la mise en mouvement du disque, deux écoulements secondaires radiaux illustrés figure 2.6 s'ajoutent à la circulation principale.



**Fig 2.6.:** Circulation dans les couches d'Ekman (en rouge) et de Stewartson (en vert) dans le cas de deux couches immiscibles.

Cette circulation s'effectue vers l'extérieur dans la couche du haut car le disque tourne dans le même sens que la cuve tandis qu'elle s'effectue vers l'intérieur en bas de la cuve : la vitesse étant très faible près du fond, c'est le gradient de pression qui domine les autres forces et qui impose la direction vers l'intérieur.<sup>†</sup> Par conservation de la masse, le fluide descend ou monte sur les côtés dans les couches de Stewartson. A l'interface, les circulations sont dans des sens opposés.

<sup>†</sup>. C'est aussi un effet que l'on peut voir dans sa tasse de thé ! Il a été expliqué par Einstein en 1926 (Einstein's tea leaves paradox).

Dans le cas de fluides *miscibles*, la structure générale de la circulation secondaire n'est pas bien connue. La section 6 s'intéressera ainsi à l'exploration de l'existence de couches Ekman internes dans le cas de fluides miscibles et l'évaluation de leur épaisseur.

## 3. Physique générale des fronts

La dynamique d'un écoulement stratifié tournant ne se réduit pas à l'équilibre entre le gradient de pression et la force de Coriolis et des instabilités de différente nature peuvent perturber cet équilibre de base. L'objectif de ce chapitre est de rappeler les ingrédients généraux entrant en jeu dans la physique des fronts et les différentes instabilités possibles et leurs critères.

### 3.1. Vorticité potentielle

On rappelle ici la définition de la vorticité potentielle : c'est une quantité importante pour les écoulements géophysiques puisqu'elle est conservée au cours du temps lors d'évolutions adiabatiques et en l'absence de friction et une fois connue la vorticité potentielle permet de déduire la fonction courant via l'inversion d'une équation elliptique (connaissant les conditions aux limites) et donc le champ de vitesse de l'écoulement (principe d'inversion') (Hoskins *et al.* (1985)).

Si on prend le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes (2.1) on obtient l'équation pour la vorticité (Pedlosky, 2001) :

$$\frac{d\vec{\omega}_a}{dt} = \vec{\omega}_a \cdot \vec{\nabla} \vec{v} - \omega_a \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \frac{\vec{\nabla} \rho \wedge \vec{\nabla} p}{\rho^2} + \vec{\nabla} \wedge (\nu \Delta \vec{v}) \quad (3.1)$$

où  $\vec{\omega}_a = \vec{\omega} + 2\vec{\Omega}$

La vorticité absolue  $\vec{\omega}_a$  est la somme de la vorticité relative  $\vec{\omega} = \text{rot}(\vec{v})$  et de la vorticité ambiante  $2\vec{\Omega}$ .

A partir de cette équation, on peut démontrer le théorème d'Ertel qui dans le cas particulier d'un modèle d'écoulement quasi-géostrophique et d'eau peu profonde s'écrit (Cushman-Roisin (1994) et Pedlosky (2001)) :

$$q = \frac{\zeta + f}{h} = \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + 2\Omega}{h} = \text{constante} \quad (3.2)$$

(où  $\zeta$  est la composante verticale de la vorticité relative  $h$  représente la hauteur de la couche d'eau). La quantité  $q$  appelée *vorticité potentielle* est conservée au cours du temps.

A  $f$  constant, si la hauteur d'eau change, la vorticité relative va augmenter ou diminuer pour maintenir constante la vorticité potentielle.

C'est aussi cette même relation qui permet de simuler en laboratoire la variation du paramètre de Coriolis suivant la latitude : faire varier  $f$  ou maintenir  $f$

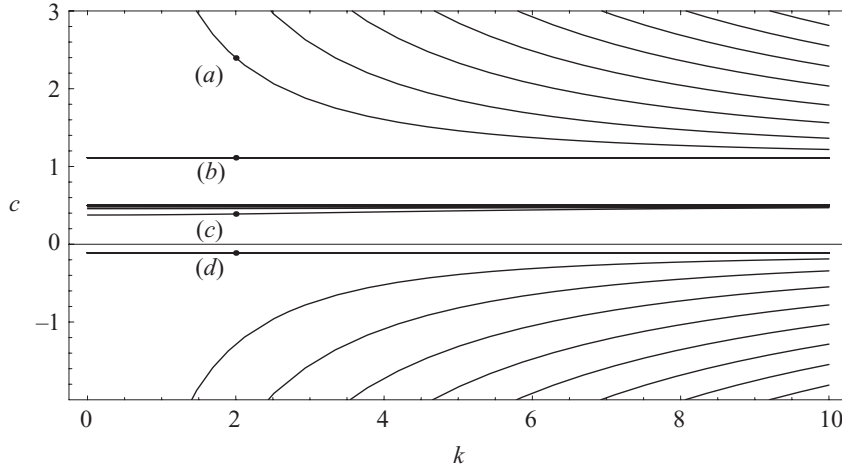
et faire varier la hauteur de la couche d'eau à l'aide d'une topographie au fond de la cuve sont équivalents au premier ordre.

Dans le cas dans système à deux couches, c'est la vorticité potentielle  $q_i$  de chaque couche qui est conservée :  $q_i = \frac{\zeta_i + f}{h_i} = \text{constante}$  où  $h_i$  est l'épaisseur de la couche  $i$  ( $i=1$  ou  $2$ ).

## 3.2. Rappels sur les ondes en milieu tournant

La nature des instabilités résultent de la nature des ondes pouvant exister dans un écoulement tournant. Un approfondissement des différents types d'ondes peut être trouvé dans les livres de [LeBlond et Mysak \(1978\)](#); [Cushman-Roisin \(1994\)](#); [Holton \(1992\)](#); [Pedlosky \(2003\)](#) ou encore [Pedlosky \(2001\)](#). Nous rappelons et illustrons ici les différents types d'ondes qui pourront être présents dans chaque couche d'eau du bicouche à l'aide des résultats du modèle à une couche en eau peu profonde dans une configuration annulaire effectuée par [Gula et al. \(2009b\)](#).

La figure 3.1 présente les lignes de dispersion des ondes de Rossby c), des ondes de Poincaré a) et des ondes de Kelvin b) et d).

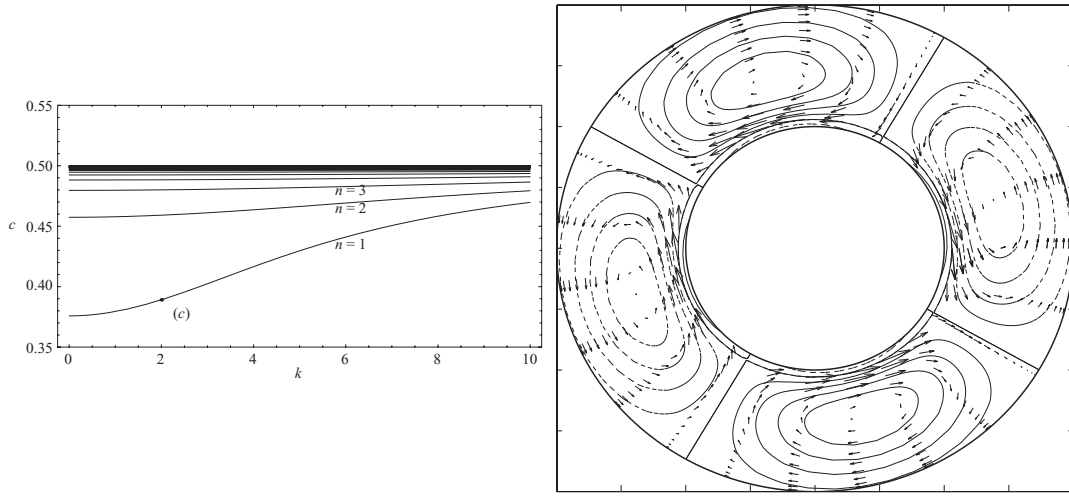


**Fig 3.1.:** Diagramme de dispersion  $c(k)$  (conventions pour les modes normaux :  $\exp(ik(\theta - ct))$ ) a) modes de Poincaré b) et d) modes de Kelvin c) modes de Rossby (Tiré de [Gula et al. \(2009b\)](#))

### 3.2.1. Ondes de Rossby

Les ondes de Rossby sont dues à la présence d'un gradient de vorticité potentielle dans l'écoulement et sont présentes dans les phénomènes météorologiques à grande échelle et correspondent à des mouvements lents. Un gradient de vorticité potentielle existe lorsque l'on considère la variation du paramètre de Coriolis (effet  $\beta$ ) ou du fait de la présence de topographie (voir par exemple [Holton](#)

(1992)). Dans le cas du système à deux couches, on se placera dans l'approximation plan-f et un disque est présent à la surface : les ondes de Rossby vont apparaître du fait de l'équilibre cyclostrophique avec une déformation parabolique de l'interface entre les deux couches induisant une épaisseur non uniforme dans chaque couche d'eau (voir A et Gula *et al.* (2009b)). L'équation de la parabole dépendant du nombre de Burger, l'existence du gradient de vorticité potentielle et l'apparition des ondes de Rossby est possible quand le nombre de déformation  $R_d$  devient de l'ordre de grandeur de la distance horizontale  $L$ . Dans l'approximation linéaire, les ondes de Rossby sont à divergence nulle et correspondent à des mouvements équilibrés ce que l'on peut voir sur la figure 3.2 : la vitesse est tangente aux isobares.



**Fig 3.2.:** A gauche : Zoom du diagramme de dispersion sur les modes de Rossby. A droite : Structure d'un mode de Rossby de nombre d'onde  $k=2$  : champ de pression et de vitesse (Tiré de Gula *et al.* (2009b))

### 3.2.2. Ondes d'inertie gravité (ou Poincaré)

Les ondes d'inertie-gravité correspondent aux mouvements rapides non équilibrés, de divergence non nulle et de vorticité potentielle nulle. La relation de dispersion dans un modèle à une couche en eau peu profonde dans un canal pour des solutions de type  $\exp(i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t))$  s'écrit :

$$\omega^2 = f^2 + gH(k^2 + l^2) \quad (3.3)$$

où  $k$  et  $l$  sont les composantes azimutales et transversales du nombre d'onde  $\vec{k}$  pour un état d'équilibre au repos. Si la longueur d'onde est petite devant  $\sqrt{gH}/f$ , alors on retrouve les ondes de gravité classiques de vitesse de phase  $c = \sqrt{gH}$ . Dans le cas contraire, on trouve des ondes inertielles. La figure 3.3 à gauche montre la structure d'un mode de Poincaré en configuration annulaire dans le cas d'un modèle à une couche en eau peu profonde. Dans le cas d'une



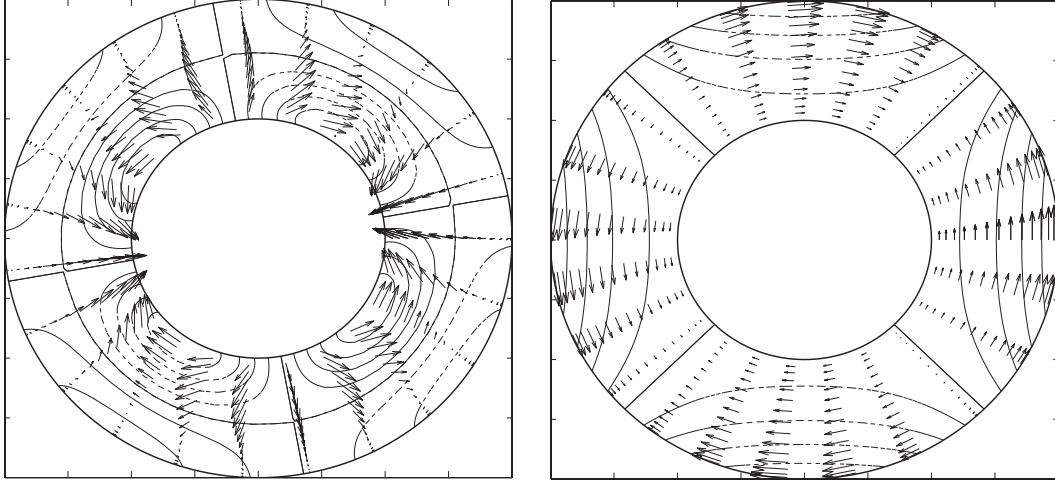
couche linéairement stratifiée et non d'une couche homogène (ou deux) , des ondes dites internes en rotation se développent caractérisées par une relation de dispersion avec une composante dues aux ondes internes (ou apparaît  $N$ ) en plus de la composante inertielle.

### 3.2.3. Mode de Kelvin : présence d'une paroi latérale

Les ondes de Kelvin sont des ondes de gravité modifiées par la présence d'une paroi latérale. Celle-ci impose une condition de vitesse normale nulle sur tout le mur. L'onde Kelvin se propage alors le long de la paroi avec une amplitude qui décroît exponentiellement dans la direction perpendiculaire à la paroi ( avec une échelle typique de décroissance exponentielle égale au rayon de déformation  $\sqrt{gH}/f$ ) et vérifie :

$$\omega^2 = k^2(gH) \quad (3.4)$$

En outre on peut montrer que la vitesse dans la direction le long de la paroi est en équilibre géostrophique avec le gradient de pression perpendiculaire. Ce n'est cependant pas le cas pour le gradient de pression dans la direction de la paroi car la vitesse perpendiculaire à la paroi est identiquement nulle comme l'illustre la figure 3.3 à droite. Dans le cas de la configuration annulaire, deux types d'ondes de Kelvin peuvent exister : celles se propageant le long du mur du cylindre extérieur ou le long du mur du cylindre intérieur.



**Fig 3.3.:** Gauche : Structure d'un mode de Poincaré pour  $k=2$ . Droite : Mode de Kelvin se propageant sur le mur du cylindre extérieur ( $k=2$ )

Un exemple connu de telles ondes dans l'océan est situé dans la manche avec les côtes françaises le long desquelles se propagent des ondes de Kelvin. Du fait du facteur exponentiel dans les expressions de la hauteur ou de la vitesse de type  $\exp(\frac{y}{\sqrt{gH}/f})$  qui doit rester décroissant, cela donne une condition selon l'hémisphère dans lequel on se trouve : les ondes se propagent avec la côte à

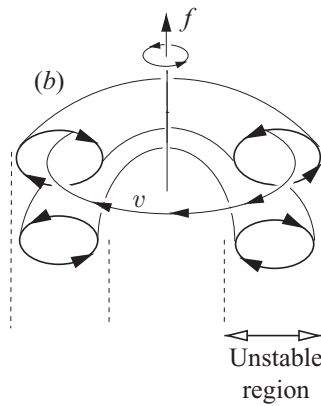
leur droite dans l'hémisphère nord ( $f > 0$ ) si l'on regarde dans la direction de propagation de l'onde et à leur gauche dans l'hémisphère sud. Dans le cas des côtes françaises cela explique que les marées sont plus grandes le long de la côte française que le long de la côte britannique (Cushman-Roisin (1994)).

### 3.2.4. Mode frontal

Pour une autre condition limite où l'interface entre les deux couches n'est pas près d'une paroi latérale mais vient intersecter une paroi horizontale soit le disque soit le fond ('incropping/outcropping'), l'onde correspondant à cette condition aux bords sera appelé mode frontal. On peut montrer qu'il possède une structure plus complexe avec à la fois des propriétés de type onde de Rossby à faible nombre d'onde et des propriétés de type ondes d'inertie-gravité pour des nombre d'onde grands (voir Gula et Zeitlin (2010)). Gula et Zeitlin (2010) note que des dénominations de d'ondes Rossby-gravité (Iga (1993)) et d'onde de Kelvin (Hayashi et Young (1987)) sont employées pour désigner ce même mode. Elles ne seront pas utilisées ici et on parlera de mode frontal.

## 3.3. Instabilité en milieu stratifié tournant

### 3.3.1. Instabilité centrifuge



**Fig 3.4.:** Structure de l'instabilité centrifuge sous forme de tores symétrique (Tiré de Kloosterziel et al. (2007))

Un premier type d'instabilités possible en milieu tournant sans stratification est l'instabilité centrifuge ou inertielle.

Le critère de stabilité associé est le critère d'instabilité de Rayleigh : il suffit que  $\frac{\partial(r u_\theta)^2}{\partial r} \geq 0$  pour que l'écoulement soit stable. Celui-ci a été étendu dans le cas du mouvement d'un vortex dans un fluide en rotation solide de vitesse  $f/2$  par

Kloosterziel et van Heijst (1991) et s'écrit : une condition nécessaire d'instabilité est que  $(\Omega + u_\theta/r)(2\Omega + \zeta) < 0$ . Cependant la structure de l'instabilité en vortex toroïdal symétrique illustré figure 3.4 diffère des structures non symétriques qui apparaissent dans les expériences et rend peu probable cette instabilité dans notre système.

### 3.3.2. Instabilités d'un écoulement quasi-géostrophique

Un écoulement peut être étudié dans l'approximation quasi-géostrophique si les perturbations de l'interface (surface libre ou interface entre les deux couches d'un bicouche) sont petites par rapport à l'épaisseur de la couche et que l'échelle de longueur horizontale est de l'ordre du rayon de déformation  $R_d$ . Le nombre de Rossby et le rapport d'aspect sont utilisés comme paramètres d'expansion asymptotique. A l'ordre zéro, on a l'équilibre géostrophique et à l'ordre 1 en Rossby on obtient les équations quasi-géostrophiques. Deux types d'instabilités peuvent exister dans le système : l'instabilité dit barotrope ou barocline.

#### Instabilité barotrope

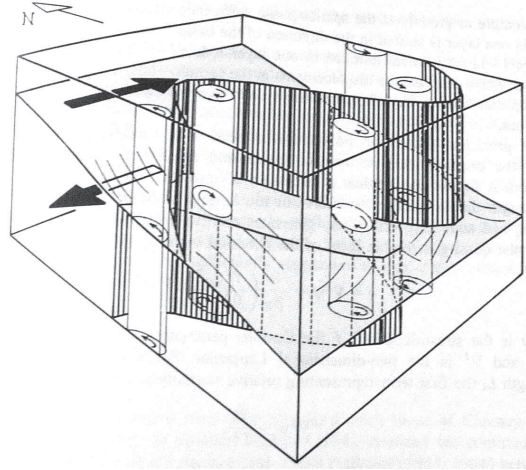
Cette instabilité est l'instabilité due à un cisaillement horizontal dans l'écoulement et met en jeu des transferts d'énergie cinétique avec l'écoulement moyen. Dans un tel écoulement, les lignes d'isodensité sont parallèles aux lignes isobares et le terme  $\frac{\vec{\nabla}\rho \wedge \vec{\nabla}p}{\rho^2}$  dans l'équation de la vorticité est nul. Le critère de Rayleigh-Kuo donne une condition nécessaire pour cette instabilité. En considérant le plan  $f$ , pour un profil de vitesse  $U(y)$  on a : Si l'écoulement est instable alors il existe une zone où le gradient de vorticité  $Q_y = -U_{yy}$  change de signe horizontalement.

#### Instabilité barocline

L'instabilité barocline peut croître à partir d'une perturbation de l'équilibre du vent thermique et donner naissance à des ondes de grandes longueurs d'ondes. D'un point de vue météorologique, l'instabilité barocline d'un front entre masses d'air chaud et froid est responsable des cyclones et anticyclones aux moyennes latitudes.

#### Mécanisme d'instabilité

Une façon simple de comprendre cette instabilité barocline est de la voir comme un phénomène convectif latéral : si un gradient de densité (ou de température) horizontal existe, l'air chaud a tendance à monter et recouvrir l'air froid. Cela engendre les ondes baroclines qui font onduler le front et créent des ondes de dépressions (cyclones) et anticyclones.



**Fig 3.5.:** Mécanisme de l'instabilité barocline (Image de *Cushman-Roisin (1994)*)

Cette fois le terme  $\frac{\vec{\nabla} \rho \wedge \vec{\nabla} p}{\rho^2}$  de l'équation 3.1 est non nul et l'instabilité implique des transferts d'énergie potentielle associée à la pente des lignes d'isodensités.

Le mécanisme d'instabilité peut être expliqué avec la conservation de la vorticité potentielle : une petite perturbation latérale (vers le Nord sur la figure 3.5) déplace du fluide de la couche supérieure vers une zone moins profonde de cette couche. Cela provoque une compression du tube de vorticité et par conservation la vorticité relative augmente : cela crée un anticyclone (en sens horaire dans l'hémisphère nord) dans cette couche comme dans celle du dessous. Vers la zone où  $h$  est plus grand dans la couche supérieure c'est le contraire : il y a étirement vertical du tube de vorticité relative et création de cyclone. Des tourbillons de sens opposés se créent donc dans les deux couches (variation de hauteur opposée). Ce sont les interactions entre les tourbillons dus à la combinaison des perturbations dans les couches inférieures et supérieures qui vont renforcer l'instabilité et faire croître l'onde barocline. En fait les perturbations dans chaque couche correspondent à des ondes de Rossby se propageant en sens opposé et on va voir que l'instabilité barocline peut être vue comme l'interaction verticale de ces deux ondes. De même l'instabilité barotrope vu précédemment peut être vue comme la résonance horizontale de deux ondes de Rossby dans une même couche.

Le critère de Charney-Stern (1962) pour l'instabilité barocline indique que pour qu'un courant  $U(y)$  soit instable, il faut que son gradient de vorticité potentielle (PV) définie section 3.1 change de signe quelque part dans l'écoulement. Dans le cas du bicouche, le gradient de PV subit effectivement un changement de signe en raison de la courbure de l'interface.

Ainsi si un écoulement quasi-géostrophique est instable, alors il existe un changement de signe dans son gradient de vorticité potentielle : selon que celui-ci s'effectue horizontalement ou verticalement on a une instabilité barotrope ou

barocline.

### *Modèle quasi-géostrophique barocline à deux couches : modèles de Phillips*

Le modèle de Phillips (1954) est un modèle simple barocline à deux couches de densité  $\rho_1$  et  $\rho_2$  et de vitesses constantes mais différentes  $U_1$  et  $U_2$ . Les équations linéarisées du mouvement pour chaque couche dans le plan-f et en l'absence de friction dans un canal de longueur infinie et de largeur  $R$  (suivant  $y$  adimensionné par  $R$ ) s'écrivent :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x}\right)[\nabla^2 \phi_1 - F_1(\phi_1 - \phi_2)] + F_1 U_s \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = 0 \quad (3.5)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x}\right)[\nabla^2 \phi_2 - F_2(\phi_2 - \phi_1)] - F_2 U_s \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = 0 \quad (3.6)$$

où  $\phi_i$  est la perturbation en fonction courant,  $q_i = \nabla^2 \phi_i - F_i(-1)^i(\phi_2 - \phi_1)$  est la perturbation de vorticité potentielle,  $F_i = \frac{f^2 L^2}{g' H_i}$  et  $U_s = U_1 - U_2$ . Pour une perturbation de la fonction de courant de type  $A_n \cos(l_j y) \exp ik(x - ct)$ , on obtient un système d'équation couplées qui donne un déterminant nul si  $c$  vérifie l'expression (Pedlosky (2001)) :

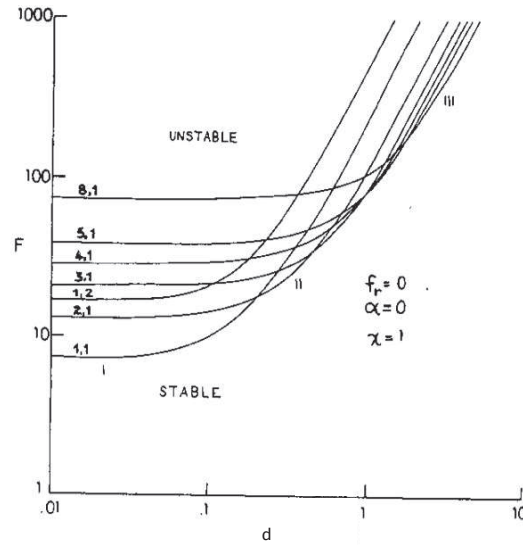
$$c = \frac{U_1(K^2 + 2F_2) + U_2(K^2 + 2F_1)}{2(K^2 + F_1 + F_2)} \pm \frac{\sqrt{-(U_1 - U_2)^2(4F_1 F_2 - K^4)}}{2(K^2 + F_1 + F_2)} \quad (3.7)$$

    $K^2 = k^2 + l^2$  est le nombre d'onde total. Si  $H_1 = H_2$  alors  $F_1 = F_2 = \mathbf{F} = \frac{f^2 L^2}{g' H}$  et l'égalité se simplifie en :

$$c = \frac{U_1 + U_2}{2} \pm \frac{\sqrt{-(U_1 - U_2)^2(4F^2 - K^4)}}{2(K^2 + 2F)} \quad (3.8)$$

Cela signifie qu'il y a croissance de l'instabilité si  $K^2 < 2\mathbf{F}$  avec un taux de croissance  $k|c_i|$ . En prenant la plus petite valeur de  $K^2$  obtenue pour  $k = 0$  et en prenant  $l_j = (j + 1/2)\pi = \pi/2$ , on a instabilité quand  $\mathbf{F} > \frac{\pi^2}{8}$  ie si  $L \geq 1.23 \frac{\sqrt{g'H}}{f}$  ie  $L \geq R_d$ . On voit donc que le nombre  $\mathbf{F}$  est le nombre seuil de l'instabilité barocline. On remarque que la vitesse de phase est indépendante de  $k$  et vaut la moyenne des vitesses dans les deux couches.

Griffiths et Linden (1981a) ont étudié les effets de friction dans l'écoulement en canal et ont montré qu'il existe alors un cisaillement minimum pour avoir instabilité et qu'il s'ajoute une coupure aux grandes longueurs d'ondes : la dissipation restabilise l'écoulement pour des nombres d'ondes trop petits. Hart (1972) a repris ce modèle à deux couches en prenant en compte des termes de friction dues aux couches d'Ekman internes et près des frontières horizontales mais en configuration cylindrique. En cherchant des solutions sous forme



**Fig 3.6.:** *Courbes neutres de stabilité pour un modèle barocline à deux couches en configuration cylindrique avec friction et dans le cas d'égales épaisseurs d'eau et de même viscosité .  $n$  est le nombre d'onde azimuthal et  $m$  le nombre d'onde radial.* (tiré de [Hart \(1972\)](#))

$A_i J_n(l_m r) \exp i(n\theta - ct)$  où  $n$  est le nombre d'onde azimuthal  $n$  et  $J_n$  est la fonction de Bessel d'ordre  $n$ , il obtient le diagramme de stabilité figure 3.6. Un développement similaire par [Holford \(1994\)](#) confirme que le nombre d'onde qui correspond au taux de croissance maximum vérifie :  $n \sim \sqrt{F}$  (voir [Hart \(1980\)](#))



## 4. Instabilités agéostrophiques : état de l'art

### 4.1. Instabilité comme résonance d'ondes

Les travaux de Cairns (1979), Marinone et Ripa (1984), Hayashi et Young (1987) et Sakai (1989) ont montré que de manière très générale, une instabilité résulte de la résonance entre deux ondes quelque soit la nature des ondes. Dans le cas d'une instabilité barocline, cette résonance s'effectue entre deux modes de Rossby, l'un situé dans la couche supérieure et l'autre dans la couche inférieure. Le modèle utilisé maintenant est un modèle à deux couches en eau peu profonde mais pas quasi-géostrophique si bien que des effets agéostrophiques et des ondes de type Kelvin ou Poincaré d'habitude filtrées par le modèle quasi-géostrophique vont pouvoir être pris en compte dans les interactions. Ces travaux mettent aussi en défaut la vision intuitive d'une instabilité qui prend son énergie de l'écoulement moyen en introduisant le concept d'énergie négative familière en physique des plasmas. A l'ordre deux, l'énergie et la quantité de mouvement peuvent alors s'écrire dans un modèle en eau peu profonde :

$$E = E_o + E_1 + E_2 \quad (4.1)$$

$$M = M_o + M_1 + M_2 \quad (4.2)$$

où  $E_o$  correspond à l'écoulement de base,  $E_1$  à l'interaction entre l'écoulement de base et les ondes et  $E_2$  est associé aux mouvement oscillatoires. On définit aussi l'énergie associée aux perturbations simplement comme la différence entre l'énergie du fluide dans l'état perturbé et celle dans l'état non perturbé :  $E' = E - E_o = E_1 + E_2$  'the disturbance energy' encore appelée pseudo-énergie ( dans la théorie dite Generalized Lagrangian Mean theory ) et de manière analogue le pseudo-moment  $M' = M_1 + M_2$ . Le signe de  $E_o$ ,  $E_1$  et  $E_2$  peut être aussi bien positif que négatif. La seule contrainte est la conservation de l'énergie du système.

En l'absence de forçage et de dissipation, des ondes d'énergie  $E'$  non nulle sont nécessairement stables car exciter des ondes d'énergies négatives aussi bien que positives changerait l'énergie totale du système. Pour un tel mode stable, on a l'égalité :

$$E = cM \quad (4.3)$$

où  $c$  est la vitesse de phase du mode. Tandis que le moment ne dépend pas du référentiel, ce n'est pas le cas de la vitesse de phase. Ainsi on voit que  $E$  n'a pas



un signe prédéfini car on peut donc choisir un référentiel tel que  $E$  soit négative ou positive.

Une onde de pseudoénergie négative peut croître dans un système dissipatif : le processus dissipatif va extraire l'énergie apportée par l'onde.

Dans un système non-dissipatif et en l'absence de sources externes, la croissance d'ondes va être possible si l'énergie associées aux perturbations  $E'$  est égale à zéro de telle sorte que l'énergie est conservée même si il y a croissance des ondes [Hayashi et Young \(1987\)](#). Pour un mode instable de pseudo-énergie  $E' = 0$ , on peut distinguer trois sortes d'instabilités :

- $E_1 \rightarrow -\infty$  and  $E_2 \rightarrow \infty$  ('positive-wave-energy instability')
- $E_1 = 0$  and  $E_2 = 0$  ('zero-wave-energy instability')
- $E_1 \rightarrow \infty$  and  $E_2 \rightarrow -\infty$  ('negative-wave-energy instability')

Dans les deux derniers cas, l'instabilité ne prend pas de l'énergie de l'écoulement moyen comme le supposait la vision intuitive d'instabilité.

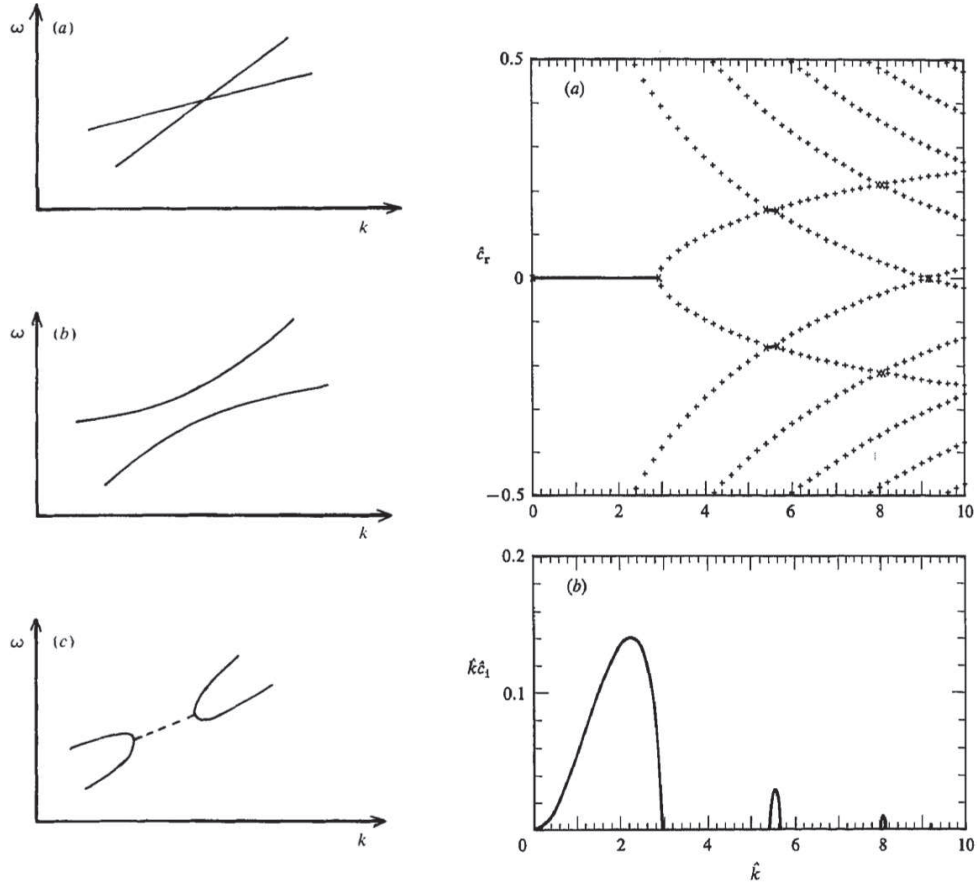
#### 4.1.1. Condition de résonance

[Hayashi et Young \(1987\)](#) montre alors qu'une instabilité apparaît quand une onde de pseudo-énergie négative entre en résonance avec une onde de pseudo-énergie positive tel que le mode instable vérifie  $E'=M'=0$ .

Pour qu'il y ait résonance pour un nombre d'onde  $k$  donné entre deux ondes de pseudo-énergies opposées, il faut en particulier [Sakai \(1989\)](#) :

- qu'elles soient stables de façon indépendante, isolées dans une couche.
- qu'il aient le même décalage Doppler en fréquence tel que les fréquences intrinsèques sont égales en valeur absolue ( $\omega_1 + kU_o \approx \omega_2 - kU_o$ )
- que les ondes aient des directions opposées par rapport à l'écoulement de base. C'est à dire que le produit des fréquences intrinsèques  $\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 < 0$
- qu'il y ait une interaction entre les ondes via la pression

Dans le cas d'un écoulement de base uniforme, le signe de la fréquence intrinsèque détermine le signe de la pseudo-énergie de l'onde. La troisième condition revient à dire que les pseudo-énergies sont de signe opposés.



**Fig 4.1.:** Gauche : Courbes de dispersion présentant une intersection entre deux modes a) modes traités de façon séparée b) pour le système complet quand le signe des pseudo-énergies est le même c) pour le système complet avec le cas instable (tiret) lorsque les pseudo-énergies des ondes ont des signes opposés. (Tiré de Cairns (1979)) Droite : Analyse de stabilité dans un modèle en eau peu profonde d'un écoulement de base zonal de vorticité potentielle nulle dans le cas d'un cisaillement horizontal : l'instabilité met en jeu l'interaction horizontale de deux ondes de Kelvin visible par l'intersection des courbes de dispersion et l'apparition d'une partie imaginaire pour c. Des résonances secondaires proviennent des modes de gravité. (Tiré de Hayashi et Young (1987))

Ces conditions vont se traduire de façon graphique sur le diagramme de dispersion du système : si un mode est instable alors nécessairement cela correspond à un endroit où deux courbes de dispersion se croisent. Sur la figure 4.1 à gauche, dans le cas a) les lignes correspondent aux courbes de dispersion de chaque onde indépendamment. Dans le cas b), il y a intersection de ces courbes mais les pseudo-énergies ne sont pas de signe opposé : il n'y a pas d'instabilité. Dans le cas c), les ondes ont le même décalage Doppler, les fréquences intrinsèques

sont de même valeur absolue et les ondes se propagent dans des directions opposées : les pseudo-énergies sont de signe opposées et il y a instabilité. La courbe en tiret de la relation de dispersion représente la vitesse de phase du mode instable et il existe une partie imaginaire correspondant au taux de croissance de ce mode. Ainsi Hayashi et Young (1987) montre un exemple d'instabilité de cisaillement horizontal barotrope comme résultat de résonance de deux ondes frontales (figure 4.1 à droite).

#### 4.1.2. Critère général d'instabilité de Ripa (1991)

Si ces instabilité agéostrophiques sont possibles même en l'absence de gradients de vorticité potentielle du fait de résonance d'ondes, les critères précédents de Rayleigh-Kuo ou de Charney, ne sont plus valables. Ripa (1991) a généralisé le critère d'instabilité dans le modèle de l'eau peu profonde (voir aussi l'article de Ripa dans le livre Nihoul et Jamart (1989) p167).

Dans le cas d'un fond plat et de deux couches de vitesses  $U_1(y)$  et  $U_2(y)$  et d'épaisseurs  $H_1(y)$  et  $H_2(y)$  et de vorticité potentielles  $Q_j = \frac{f - dU_j/dy}{H_j}$  de l'écoulement de base le critère de Ripa s'écrit :

Critère de Ripa pour deux couches et un fond plat

Si  $\exists \alpha$  tel que  $\forall y$  on a :

- $\frac{U_j(y) - \alpha}{\frac{\partial Q_j(y)}{\partial y}} \leq 0$  ( $j=1,2$ )
  - et  $\frac{U_1(y) - \alpha^2}{H_1(y)} + \frac{U_2(y) - \alpha^2}{H_2(y)} \leq g'$
- alors l'écoulement est stable.

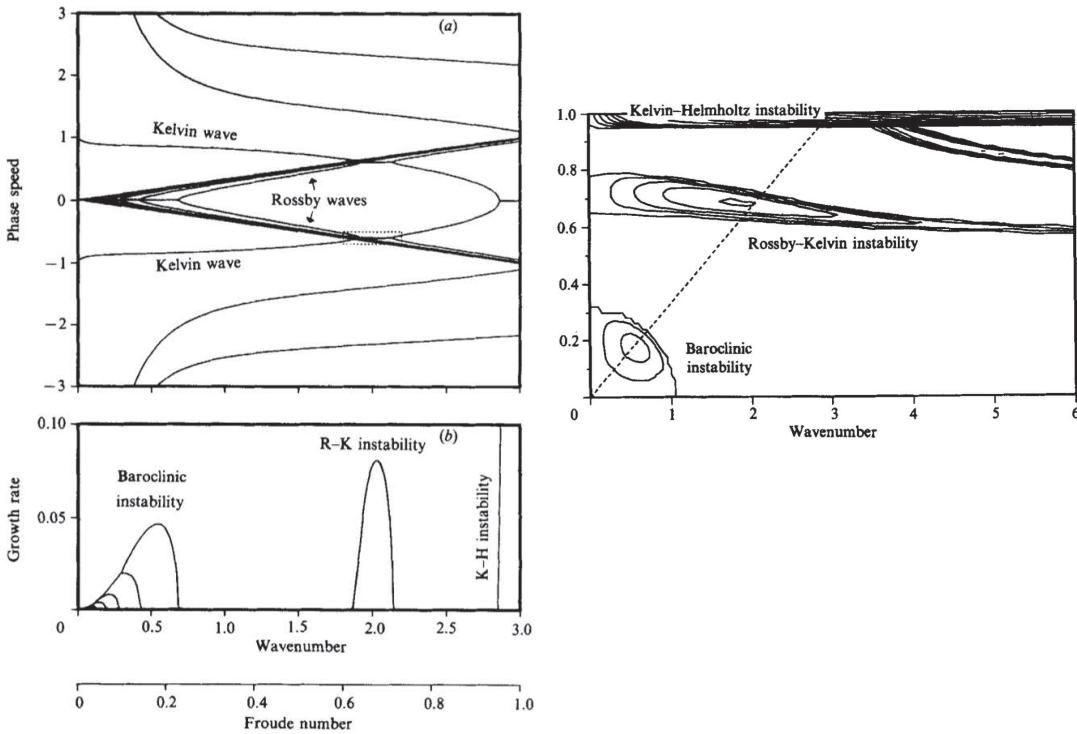
La contraposée est donc une condition nécessaire d'instabilité : Si l'écoulement est instable, alors nécessairement on a :

$$\forall \alpha \exists y \text{ tq } \frac{U_j(y) - \alpha}{\frac{\partial Q_j(y)}{\partial y}} > 0 \text{ ou } \frac{U_1(y) - \alpha^2}{H_1(y)} + \frac{U_2(y) - \alpha^2}{H_2(y)} > g'$$

Ecrite sous cette forme, on peut voir que la 1ère condition du critère de Ripa contient le critère de Rayleigh-Kuo ou de Charney mais que la présence de la deuxième condition permet d'avoir une instabilité même si le gradient de vorticité potentielle ne change pas de signe. Ce cas correspond à des instabilités agéostrophiques résultant de la résonance d'ondes incluant des ondes de Poincaré ou de Kelvin divergentes.

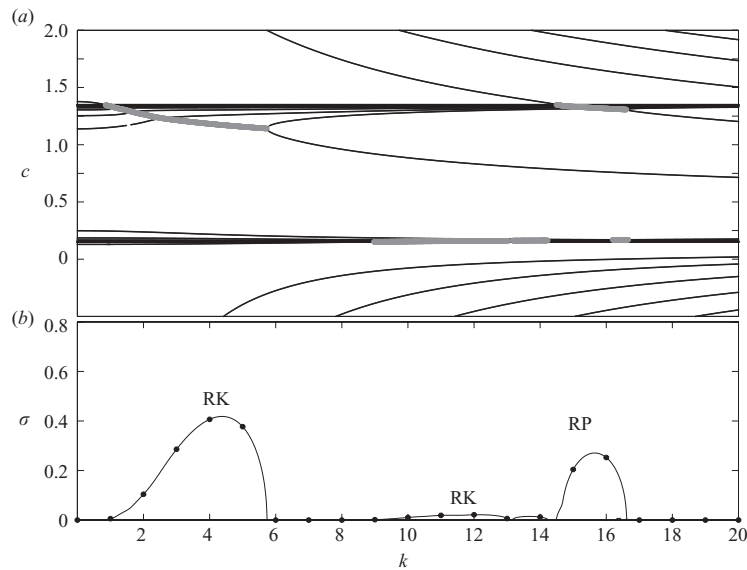
## 4.2. Instabilités agéostrophiques : instabilité de Rossby-Kelvin

L'étude agéostrophique dans le cas d'un bicouche cisailé correspondant à notre expérience de front, a été effectuée par Sakai (1989) et repris par Gula *et al.* (2009a) dans le cas d'un canal. Les résultats mettent en évidence une instabilité agéostrophique résultant de la résonance d'une onde de Rossby et d'une onde de Kelvin dont le taux de croissance est comparable à celui de l'instabilité barocline et qui apparaît dans une zone du nombre de Froude différente de l'instabilité barocline (figure 4.2)



**Fig 4.2.:** Mise en évidence de l'instabilité de Rossby-kelvin pour un bicouche cisailé dans un canal (tiré de Sakai (1989)).

Gula *et al.* (2009b) a effectué la même étude en configuration annulaire afin de permettre des comparaisons avec les expériences de laboratoire en cuve tournante et met en évidence plusieurs types d'instabilités selon les résonances d'ondes. Le tableau 4.1 résume les différentes instabilités possibles selon les valeurs du nombre de Burger et le nombre de Rossby en les classant du plus petit au plus grand nombre d'onde.



**Fig 4.3.:** Diagramme de dispersion et taux de croissance pour un écoulement en configuration annulaire avec  $Bu=4$  et  $Ro=1.5$  (Gula et al., 2009b)

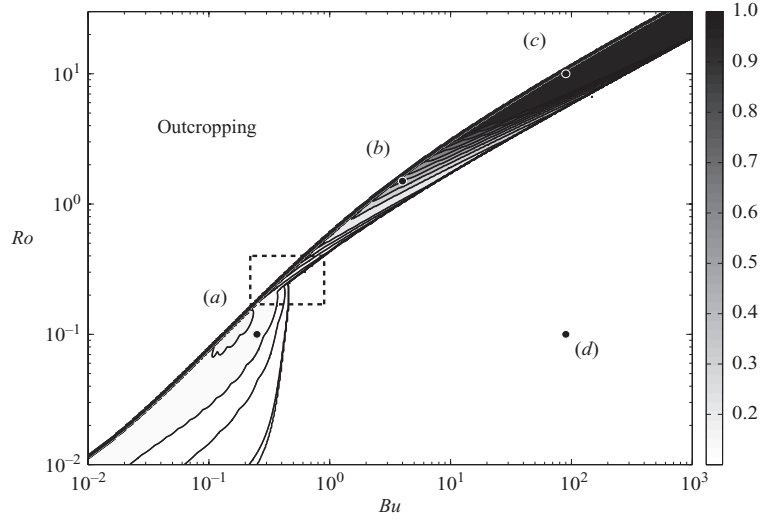
Ondes en résonance	nom général usuel associé à l'instabilité
Rossby-Rossby	instabilité barocline
Rossby-Kelvin	instabilité Rossby-Kelvin
Rossby-Poincaré (gravité)	instabilité Rossby-Poincaré
Kelvin-Kelvin	instabilité Kelvin-Helmholtz
Kelvin-Poincaré (gravité)	instabilité Kelvin-Helmholtz
Poincaré-Poincaré	instabilité Kelvin-Helmholtz

**Table 4.1.:** Récapitulatif des instabilités possibles par résonance d'ondes.

Les taux de croissance ne sont cependant en général significatifs que pour l'instabilité barocline, l'instabilité de Rossby-Kelvin et les modes élevés de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. La figure 4.3 montre un exemple de résultat de l'analyse de stabilité linéaire pour des valeurs particulières des nombres sans dimension. Du fait de la configuration annulaire, les modes ne peuvent prendre que des valeurs discrètes indiquées par des points sur les courbes du taux de croissance. En outre, Gula et al. (2009b) a réalisé un diagramme (figure 4.4) dans l'espace global (Rossby, Burger) (nombres définis en section 2.2.2).

### 4.3. Travaux expérimentaux antérieurs

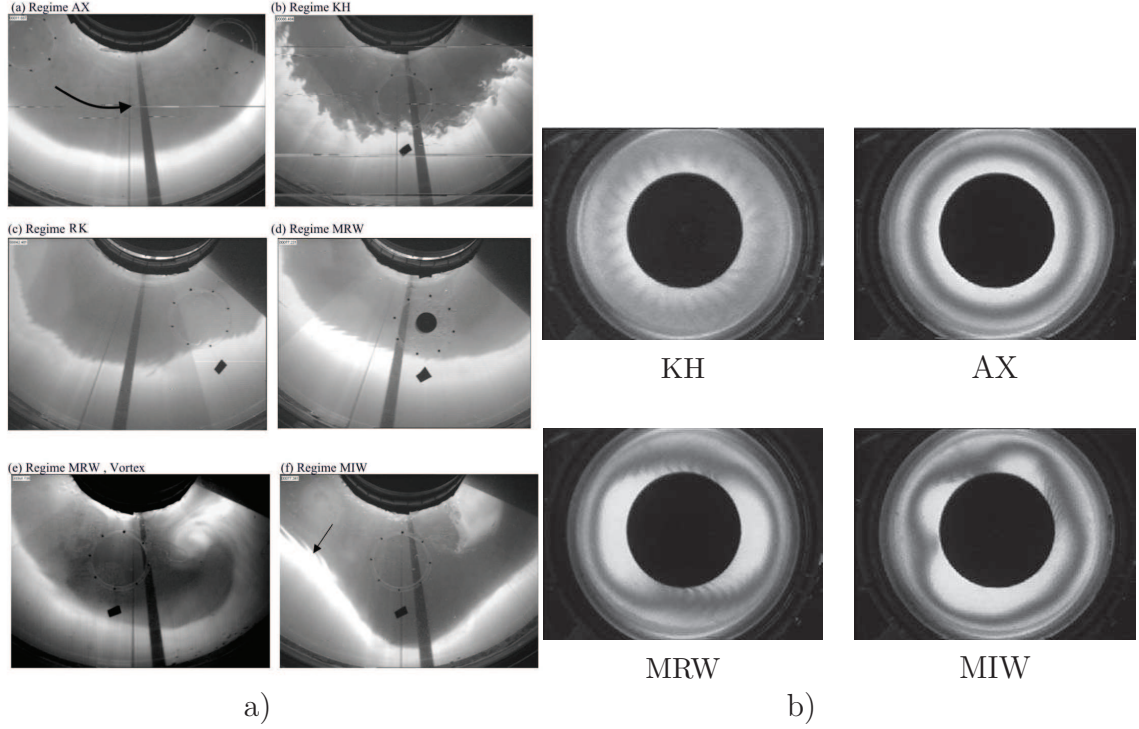
La figure 4.5 montre des vues expérimentales pour deux expériences de front de même type réalisées respectivement a) par Flór (2007) et b) Williams et al.



**Fig 4.4.:** Taux de croissance des modes les plus instables dans l'espace  $(Ro, Bu)$ . Les zones les plus noires correspondent aux taux de croissance les plus élevées. L'espace supérieur correspond à la zone où l'interface entre en contact avec les frontières horizontales ('outcropping'). d) correspond à la zone stable. c) à la zone d'instabilité de Kelvin-Helmholtz b) à la zone d'instabilité de Rossby-Kelvin et a) l'instabilité barocline.

(2005) reprenant les expériences de [Lovegrove et al. \(2000\)](#). Dans les deux cas, on accélère la rotation globale en maintenant un cisaillement vertical par le disque constant. Cela permet de balayer l'espace des paramètres sans dimension.

On peut voir le passage du régime axisymétrique AX, stable sans ondes, à celui de Kelvin-Helmholtz KH, visible par la présence d'onde de petite longueur d'onde. Après un régime intermédiaire déjà pressenti comme celui d'une possible instabilité Rossby-Kelvin, deux régimes mixtes apparaissent (MRW=Mixed regular wave et MIV=Mixed irregular waves) combinant de grandes longueurs d'onde dues à l'instabilité barocline et de petites longueurs d'ondes (flèche).

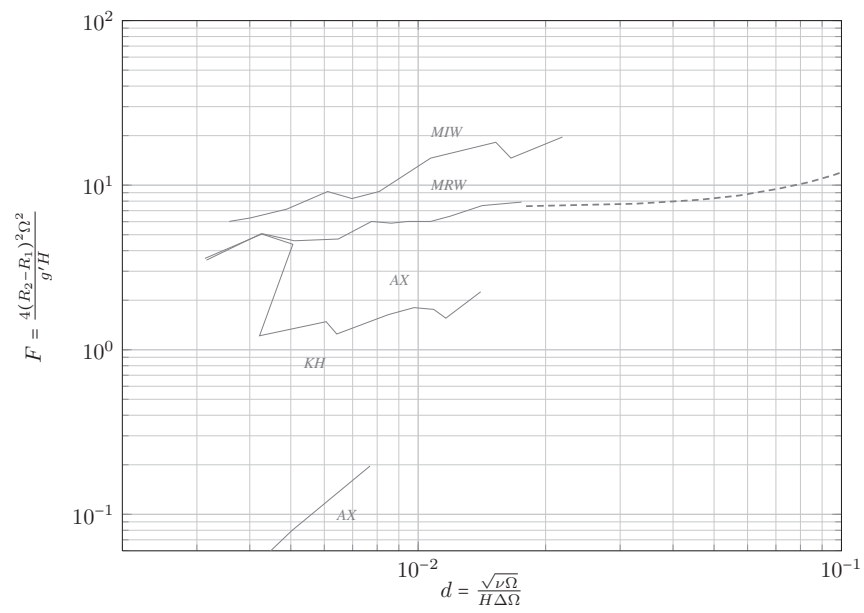


**Fig 4.5.:** *Front vu de dessus pour deux expériences de cuve annulaire tournante :*  
a) J.B Flor et collaborateurs [Flór \(2007\)](#) (la tranche laser horizontale rencontre le fluide de plus forte densité en noir puis le fluide de densité plus faible lumineux grâce à de la fluorescéine. Les deux fluides sont miscibles.)  
b) Equipe de P.Read (front visualisé par une méthode optique basée sur la biréfringence) avec un dispositif plus petit et deux fluides immiscibles [Williams et al. \(2005\)](#).

La figure 4.6 représente le diagramme expérimental associé aux expériences de [Williams et al. \(2005\)](#). Il est dessiné en fonction de  $\mathbf{F}$  et  $d$  c'est à dire l'inverse du Burger et le nombre de dissipation. La limite en pointillé correspond au calcul de la limite de stabilité linéaire du modèle barocline à deux couches de [Hart \(1972\)](#) pour le premier mode azimuthal et radial présenté section 3.3.2.

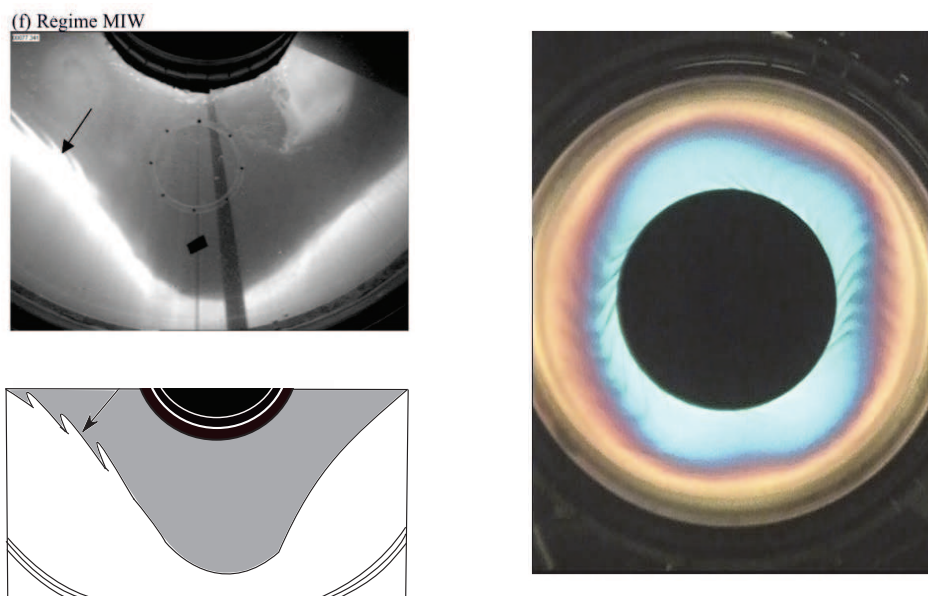
Ce diagramme expérimental ainsi que le diagramme de stabilité linéaire fourni par [Gula et al. \(2009b\)](#) et les valeurs en nombre d'onde le plus instable et le taux de croissance associé ainsi que les structures des champ de vitesses et de pression dans chaque couche sont autant de prédictions que nous testerons expérimentalement dans le chapitre 7 et comparerons au diagramme de la figure 4.6.





**Fig 4.6.:** *Diagramme des régimes deux régimes mixtes apparaissent (MRW=Mixed regular wave et MIV=Mixed irregular waves) combinant de grandes longueurs d'onde dues à l'instabilité barocline et de petites longueurs d'ondes (flèche).*

#### 4.4. Perturbations de petite échelle



**Fig 4.7.**



D'autre part dans certains régimes, on peut voir la présence de petites ondes sur le mode principal figure 4.7. La nature de ces ondes n'est pas encore bien connue ni leur interaction avec les grandes ondes. Elles ont pourtant potentiellement un rôle crucial dans la formation de tourbillons secondaires. Williams *et al.* (2005) identifient ces petites ondes comme des ondes d'inertie-gravité émises spontanément.

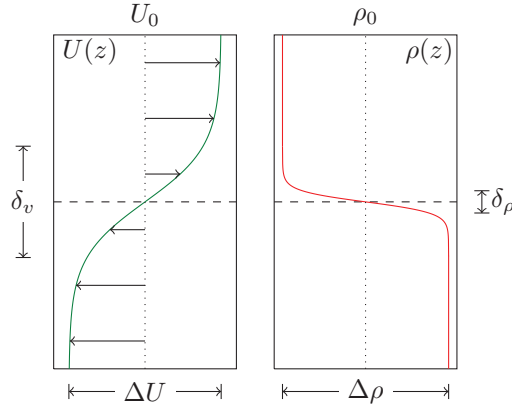
Pour obtenir de telles perturbations sur un front, deux mécanismes sont envisagés :

- les instabilités de cisaillement stratifié (généralisation d'une instabilité de type Kelvin-Helmholtz)
- l'émission spontanée d'ondes inertie-gravité.

#### 4.4.1. Instabilité de cisaillement en présence de stratification : Théorie de Hölmböe

Les études d'instabilités précédentes considéraient un modèle à deux couches dans lequel à la fois la densité et la vitesse subit un brusque saut en passant d'une couche à l'autre c'est à dire que l'épaisseur en densité aussi bien que l'épaisseur en vitesse entre les deux couches est nulle. La seule instabilité de cisaillement de petite longueur d'onde trouvée est l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, résonance d'ondes de gravité pure ou n'intervient pas la stratification. En réalité la stratification et l'épaisseur entre les deux couches aussi bien en densité qu'en vitesse interviennent dans l'instabilité de cisaillement vertical. Bien que le système étudié soit en rotation, on peut s'intéresser à la théorie des instabilités de cisaillement avec stratification en milieu non tournant en considérant que les ondes évoluent sur des échelles de temps largement inférieures à la période de rotation globale (nombre de Rossby des ondes suffisamment grand).

### Critère général de Miles-Howard



**Fig 4.8.:** Profils verticaux de vitesse et de densité typique d'un front entre deux couches

Si on considère un profil de vitesse et de densité à une dimension  $U(z)$  et  $\rho(z)$  figure 4.8, le nombre sans dimension le plus général qui permet alors d'étudier une telle instabilité est le nombre de Richardson gradient défini par :

$$Ri(z) = N^2 / (dU/dz)^2 \quad (4.4)$$

avec  $N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z}$  la fréquence de Brünt-Väissälä avec une référence de densité  $\rho_0$ . Un critère très général démontré par [Miles \(1961, 1963\)](#) and [Howard \(1961\)](#) donne des informations sur la stabilité d'un écoulement stratifié et soumis à un cisaillement sans résoudre d'équations.

#### Critère de Miles-Howard

- Si  $Ri(z) \geq 1/4$  partout dans le profil alors l'écoulement est stable. C'est une condition suffisante de stabilité.
- Si  $Ri(z) < 1/4$ , alors des modes instables peuvent exister mais ce n'est pas une condition suffisante pour déterminer l'instabilité.

On peut raisonner simplement pour retrouver ce critère en considérant le bilan énergétique lors de l'échange de position entre deux particules de chaque couche. On aura déstabilisation si la différence d'énergie cinétique est supérieure au travail effectué pour échanger les deux particules. On peut montrer ([Chandrasekhar, 1961](#)) que cela s'écrit :

$$\frac{\rho_0}{4} (\delta u)^2 > -g \frac{d\rho}{dz} (\delta z)^2$$

### Equation de Taylor-Goldstein

En linéarisant les équations du mouvement dans un fluide boussinesq et en considérant les modes normaux de type  $\exp(ik(\theta - ct))$ , on obtient l'équation de Taylor-Goldstein qui détermine la stabilité d'un écoulement stratifié cisailé :

$$\psi'' - \left[ k^2 + \frac{U''}{U - c} - \frac{N^2}{(U - c)^2} \right] \psi = 0 \quad (4.5)$$

où  $\psi$  est la fonction courant.

Depuis les premiers résultats de [Hölmboe \(1962\)](#) et [Hazel \(1972\)](#), de nombreuses études expérimentales [Lawrence et al. \(1991\)](#), [Pouliquen et al. \(1994\)](#), ou théoriques et numériques [Ortiz et al. \(2002\)](#) [Alexakis \(2005, 2007, 2009\)](#); [Carpenter \(2009\)](#) ont été réalisées.

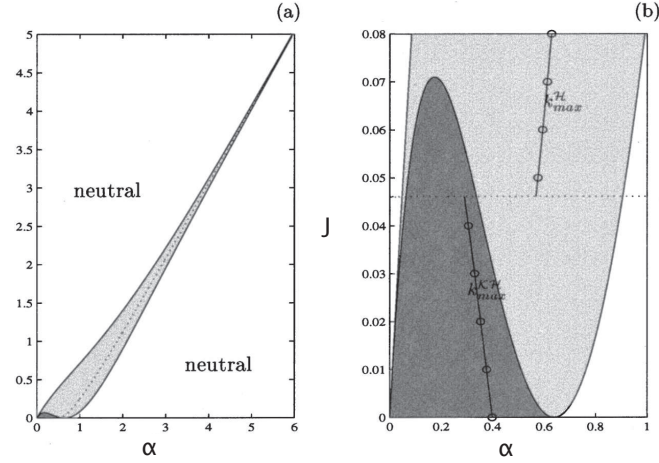
De la même façon que [Tedford et al. \(2009\)](#); [Carpenter \(2009\)](#) ou [Ortiz et al. \(2002\)](#) et [Lawrence et al. \(1991\)](#), afin d'établir un diagramme de stabilité, on peut définir trois nombres sans dimension globaux :

$$J \equiv \frac{g \Delta \rho 2 \delta_v}{\rho_0 (\Delta U)^2} \quad R \equiv \frac{\delta_v}{\delta_\rho} \quad \text{and} \quad a \equiv \frac{2d}{\delta_v} \quad (4.6)$$

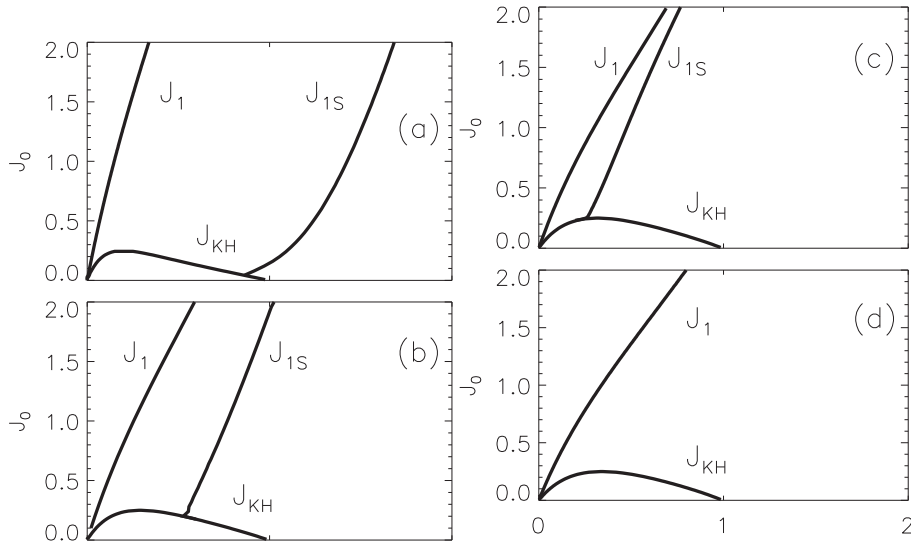
où  $\rho_0 = (\rho_1 + \rho_2)/2$  est la densité moyenne,  $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$  and  $\Delta U = U_2 - U_1$ .  $J$  est appelé le nombre de Richardson 'bulk',  $R$  correspond au rapport des épaisseurs des profils de vitesse et densité et  $a$  est un paramètre qui fait intervenir un éventuel décalage vertical de l'interface de vitesse par rapport à l'interface de densité. On utilise le nombre d'onde adimensionné  $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\delta_v}{2}$  basé sur la moitié de l'épaisseur de cisaillement  $\delta_v/2$ .

### Diagramme de stabilité

Si le front de densité est net on peut supposer  $\delta_v \gg \delta_\rho$  et considérer un saut de densité et un profil de densité par morceau avec un changement linéaire de vitesse entre les deux couches. Des résultats analytiques sont alors réalisables. Dans le cas symétrique où  $a = 0$ , on obtient le diagramme de stabilité de la figure 4.9.



**Fig 4.9.:** Courbes de stabilité marginales dans le plan  $(\alpha, J)$ . La zone gris foncé correspond à l'instabilité de Kelvin-Helmholtz et la zone gris claire à l'instabilité de Hölmböe (b) zoom pour  $J < 0.08$  (Graphes de [Ortiz et al. \(2002\)](#) adaptés à nos conventions d'écriture)



**Fig 4.10.:** Changement du diagramme  $(\alpha, J)$  avec le rapport  $R$  (tiré de [Alexakis \(2005\)](#)  $J_0$  est défini ici par :  $J_0 = J \times R$ ). a)  $R = 4$ , b)  $R = 2.5$ , c)  $R = 2.2$ , d)  $R = 2$ . Dans la figure d), les deux limites de stabilité (nommées  $J_1$  et  $J_{1S}$ ) sont confondues en une seule ligne.

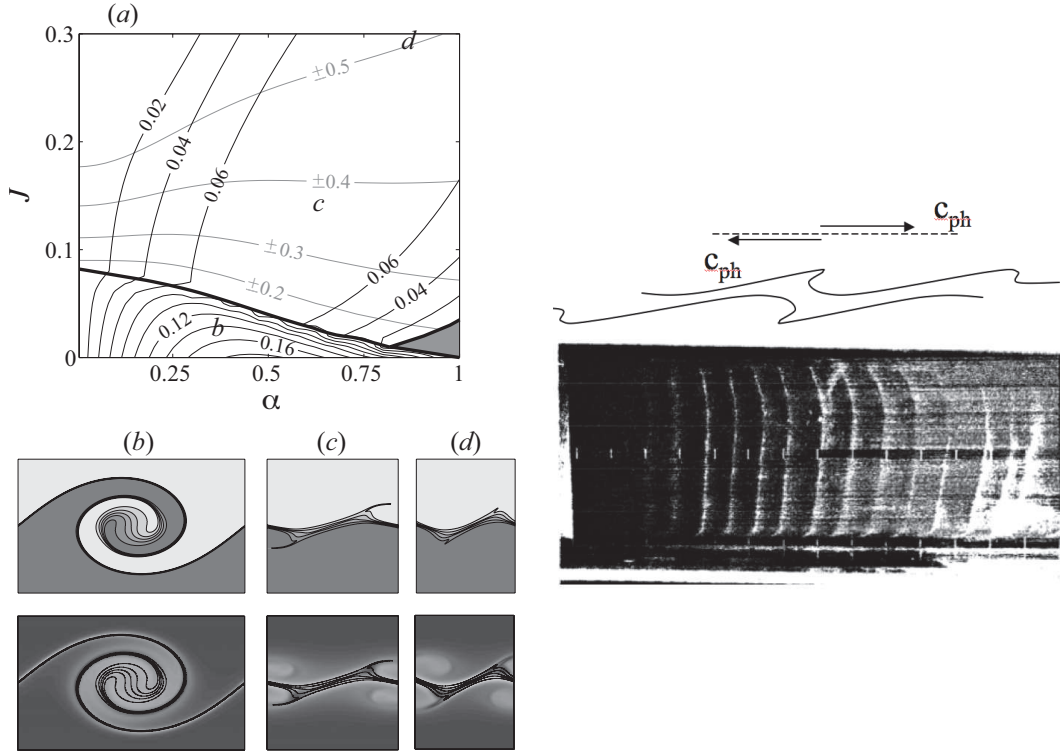
On voit que l'on peut avoir instabilité appelée instabilité de Hölmböe même pour des nombres de Richardson bulk élevés. D'autres analyses par [Alexakis \(2005, 2007, 2009\)](#) dans le cas de profils plus réalistes mettent en évidence l'importance du rapport d'aspect  $R$  entre l'épaisseur de cisaillement et l'épaisseur

de densité. Il montre que la forme du Richardson gradient varie beaucoup avec  $R$  et que le diagramme de stabilité se modifie (voir figure 4.10).

Le résultat principal à retenir est que l'instabilité de type Hölmböe dans le cas de profils réalistes n'apparaît que pour un rapport  $R$  supérieur à deux.

On voit donc la nécessité de connaître les profils et leurs épaisseurs afin de déterminer la stabilité d'un écoulement réaliste.

### Caractéristiques des deux instabilités



**Fig 4.11.:** Gauche : a) diagramme de stabilité pour des profils continus et pour  $R=5$  (Tiré de [Carpenter et al. \(2010\)](#)). Les contours noirs représentent les contours du taux de croissance et les contours gris ceux de la vitesse de phase. Les lignes épaisses noires représentent les limites de stabilité et la transition entre les modes stationnaires de Kelvin-Helmholtz (zone du bas) et les modes propagatifs de Hölmböe (zone du haut). La structure verticale de l'instabilité est indiquée pour b) la zone KH et c) et d) deux endroits dans la zone instable de Hölmböe. Droite : en haut : Structure de l'instabilité de Holmboe (cas symétrique) chaque crête se propage en sens opposé. Bas : Vue de dessus expérimentale de l'instabilité de Holmboe dans un canal : les traits blancs correspondent aux crêtes nettes de l'instabilité de Hölmböe (Tiré de [Lawrence et al. \(1991\)](#))

En dehors des valeurs de  $J$  et  $\alpha$  permettant l'instabilité de Kelvin-Helmholtz ou l'instabilité de Holmboe, les deux instabilités se distinguent par leurs caractéristiques.

Comme l'illustre la figure 4.11, l'instabilité de Kelvin-Helmholtz présente une structure connue 'd'oeil de chat' et les modes sont stationnaires. Au contraire, l'instabilité de Hölmböe peut être identifiée dans le cas symétrique (où  $a=0$ ) par deux ondes aux crêtes fines et nettes se propageant en sens opposés de chaque côté de l'interface.

### Retour sur l'instabilité comme résonance d'ondes

Baines et Mitsudera (1994) a montré que le concept d'instabilité comme résonance d'ondes peut aussi être appliqué pour les instabilités de cisaillement stratifié.

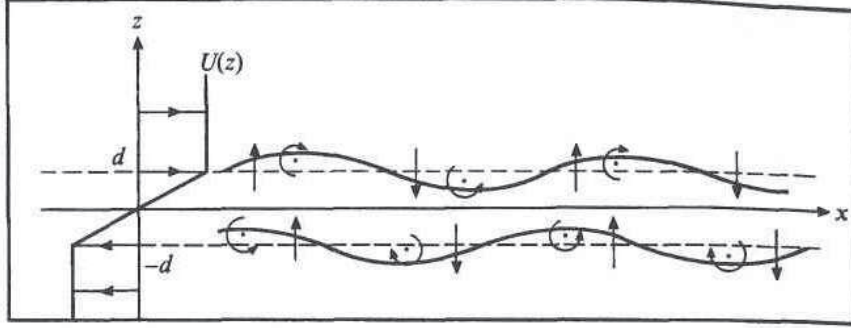
De la même façon que Carpenter *et al.* (2010), les profils pris pour raisonner sont ici un saut de densité et un changement linéaire en vitesse dans une configuration symétrique comme illustré dans le cas a) figure 4.13. Ceux-ci présentent une fonction-delta pour le gradient de vorticité  $U''$  et le gradient de densité. Ce sont à ces endroits appelés interfaces que peuvent apparaître des ondes. Les ondes isolées sont respectivement une onde de vorticité et une onde de gravité interne de vitesse de phase (Baines et Mitsudera (1994); Carpenter *et al.* (2010)) :

$$c_v = U(z_v) + \frac{\Delta q}{2k} \quad (4.7)$$

$$c_d = U(z_d) \pm \sqrt{\frac{g'}{2k}} \quad (4.8)$$

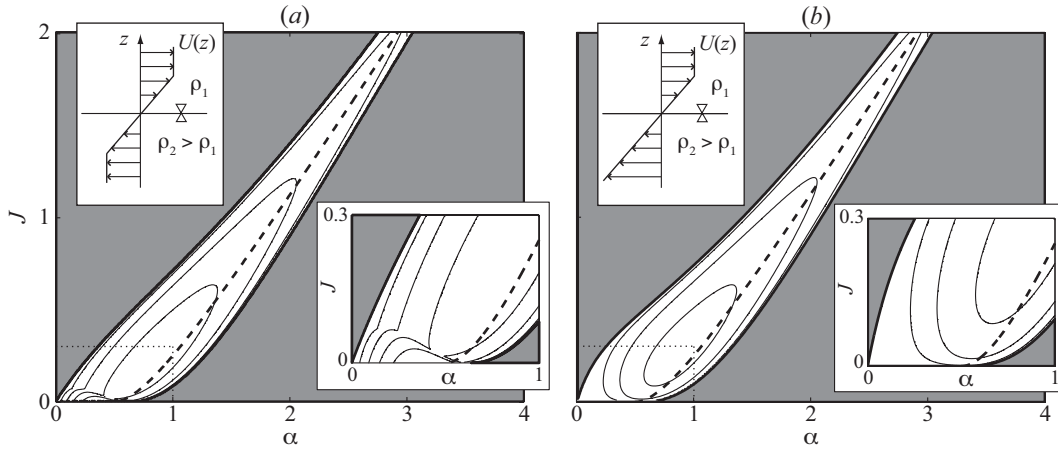
où  $\Delta q = U'(z_v^+) - U'(z_v^-)$  représente le saut de vorticité à l'interface  $z_v$  et  $g' = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}}$ . On a pris ici l'approximation d'ondes de petites longueurs d'ondes ou encore d'eau profonde pour les ondes interfaciales (voir LeBlond et Mysak (1978) page 86). On remarque qu'une interface de vorticité supporte une seule onde de vorticité alors qu'une interface en densité permet deux ondes se propageant en sens opposés.

Le cisaillement va permettre l'ajustement des vitesses de phases et l'interaction des ondes. Le type d'ondes qui interag t permet d'identifier le mécanisme dans chaque instabilité.



**Fig 4.12.:** L'instabilité de Kelvin-Helmholtz résulte de la résonance entre deux ondes de vorticité. (Tiré de [Baines et Mitsudera \(1994\)](#))

- L'instabilité de Kelvin-Helmholtz ne nécessite pas la stratification et peut être vue comme la résonance d'onde entre les deux ondes de vorticité qui se propagent sur les deux interfaces de vorticité comme l'illustre la figure 4.12.
- On aura une onde de type Hölmböe si on a interaction entre une onde de vorticité et une onde de gravité interne. Dans le cas de nos profils, il y a deux interfaces de vorticité et une interface de densité permettant deux ondes de gravité internes et donc cela permet la naissance de deux ondes de Hölmböe,  $H^+$  et  $H^-$  chacune se propageant dans des sens opposés.



**Fig 4.13.:** Diagramme de stabilité montrant a) le cas d'un profil de cisaillement linéaire et symétrique et b) le cas de [Baines et Mitsudera \(1994\)](#) avec un profil de vitesse présentant une seule interface de vorticité. Les lignes représentent les contours de taux de croissance et les zones grises sont les zones stables. La ligne épaisse pointillée est obtenue en faisant l'approximation de résonance ie en égalisant les vitesses de l'onde interne et l'onde de vorticité.

Ces résultats sont confirmés en comparant les diagrammes de stabilité linéaires pour le profil de vitesse précédent et un profil de vitesse avec une seule interface de vorticité (cas b) de la figure 4.13). On peut voir que la zone instable de Hölmböe reste presque inchangée d’une situation à l’autre alors que la région instable de Kelvin-Helmholtz est complètement éliminée. En effet puisque seule l’onde de vorticité et l’onde de gravité interne se propageant vers la droite peuvent interagir, on a seulement un mode de Hölmböe (le mode H+) et l’instabilité de Kelvin-Helmholtz n’est pas possible. Les lignes épaisses en pointillées sont obtenues en effectuant ‘l’approximation de résonance’ c’est à dire en égalisant les vitesses de phases d’une onde de vorticité et d’une onde interne. Le bon accord de ces courbes avec les diagrammes confirment que les modes de Hölmböe sont causés par l’interaction d’une onde de vorticité et d’une onde interne. Dans le cas a) de la figure 4.13 les deux lignes correspondant aux deux modes de Hölmböe sont en fait confondues du fait de la symétrie.

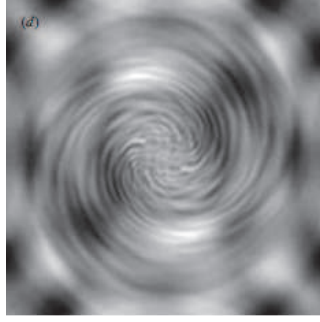
#### 4.4.2. Ondes inertie-gravité spontanément émises

##### Mise en évidence d’émission d’ondes pour des mouvements équilibrés

Des perturbations de petite échelle peuvent être aussi le résultat d’émission d’ondes d’inertie-gravité. Quand leur présence n’est pas impliquée du fait d’une instabilité de type Kelvin-Helmholtz, les ondes inertie-gravité connues sont le plus souvent émises par interaction entre un écoulement et un obstacle (topographie ou convection provoquant des ondes internes), ondes dites orographiques. Des ondes peuvent aussi apparaître du fait d’un déséquilibre initial dans un écoulement qui induit un ajustement transitoire au cours duquel il y a radiation d’ondes pour relaxer les conditions initiales vers un nouvel état d’équilibre géostrophique [Reznik et al. \(2001\)](#). Ces dernières ondes peuvent êtres qualifiées d’ondes d’ajustement géostrophique.

Cependant, la radiation d’ondes inertie-gravité a aussi été observée dans des cas non-orographiques pour des mouvements initialement équilibrés bien décrits par les équations quasi-géostrophiques. L’émission de ces ondes agéostrophiques due à un ‘déséquilibre spontané’ (‘spontaneous imbalance’) est encore mal connue et regroupe différents mécanismes. Des ondes inertie-gravité ont été observées dans des études numériques lors de frontogénèse ([Snyder et al. \(1993\)](#), [Griffiths et Reeder \(1996\)](#)), ou émises par des vortex elliptiques ([Ford \(1994\)](#), [Plougonven et Zeitlin \(2002\)](#) ou pour des jets atmosphériques (simulation [van Tuyl et Young \(1982\)](#), études observationnelles basées sur des radiosondages ([Plougonven et al., 2003](#))) et lors de l’évolution nonlinéaire d’onde barocline idéalisée ([O’sullivan et Dunkerton \(1995\)](#) [Zhang \(2004\)](#), [Plougonven et Snyder \(2005, 2007\)](#)) et lors d’écoulements stratifiés en rotation et avec cisaillement horizontal ([Vanneste et Yavneh, 2004, 2007](#)) ou encore lors de la propagation d’un vortex dipolaire ([Snyder et al. \(2007\)](#)). [Schechter \(2008\)](#) a mis aussi en évidence des ondes-inertie gravité pour un vortex monotone à haut nombre de Rossby et





**Fig 4.14.:** *Distribution de vitesse verticale montrant des ondes en spirales émises par un anticyclone ellipsoïde (Viúdez, 2006).*

Viúdez (2006) pour un vortex ellipsoïdal avec une émission sous forme de motifs spirales (voir figure 4.14).

### Mécanismes d'émission

La synthèse réalisée sur les mécanismes d'émissions d'ondes présentée ici s'inspire largement des revues générales sur ce thème de McIntyre (2009) et Plougonven (2010).

#### *Radiation de Lighthill*

C'est la première théorie analytique proposée expliquant l'émission d'ondes et qui a servi de référence en la matière. En effet, la théorie de Lighthill (1952) permet initialement de décrire le bruit généré par un écoulement turbulent : on considère que l'on peut décomposer le système en une zone source et une zone de propagation au repos. L'émission est faible et aucune rétroaction des ondes sur l'écoulement ne modifie l'écoulement. Le nombre de Mach  $M = \frac{U}{c_{\text{son}}}$  est supposé plus petit que 1 et comme l'échelle temporelle est la même ( $\text{Ro} > 1$ ), ce petit nombre de Mach induit une séparation des échelles spatialement avec une émission d'ondes de grandes longueurs d'ondes comparé aux échelles des mouvements turbulents. Ford (1994) a appliqué ces résultats aux écoulements géophysiques en faisant une analogie entre les équations d'un fluide compressible 2D et les équations en eau peu profonde. Le nombre de Mach est remplacé par le nombre de Froude  $F = \frac{U}{c_{\text{gravity-waves}}}$ . Le rayonnement d'ondes est régi par une équation où des termes non linéaires (de type quadripolaire) sont des termes sources de l'opérateur linéaire correspondant à la propagation d'ondes inertie-gravité dans un fluide au repos :

$$\underbrace{\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 - gH\nabla^2 \right)}_{\text{Linear operator}} \frac{\partial h}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{G} + f\mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{G} + \frac{g}{2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 h^2}_{\text{Source = Non linear terms}} \quad (4.9)$$

avec

$$\vec{G} = \vec{u}\nabla \cdot (h\vec{u}) + (h\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$$

Ici on se place dans le cas d'un fluide barotrope avec la gravité simple  $g$ ,  $H$  est la hauteur du fluide au repos et  $h$  la hauteur de la surface libre. Néanmoins, ce mécanisme est valable uniquement pour des nombres de Rossby plus grands que 1 tels qu'il n'y a pas de séparation temporelle entre des mouvements équilibrés et des ondes de gravité.

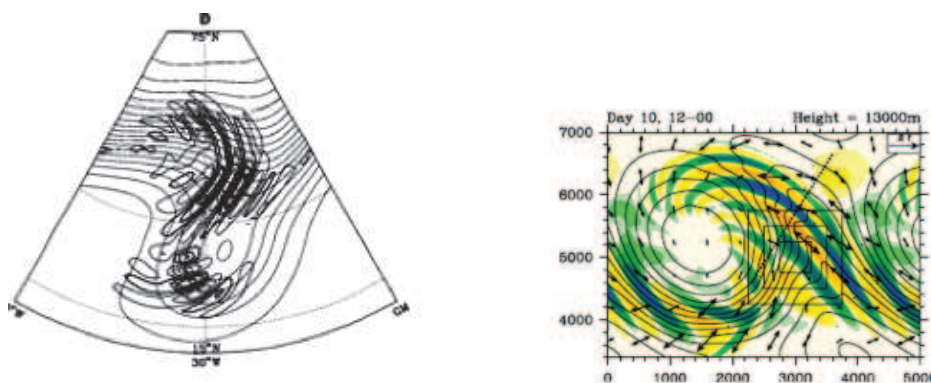
### En dehors de la théorie de Lighthill

- *Couplage par advection*

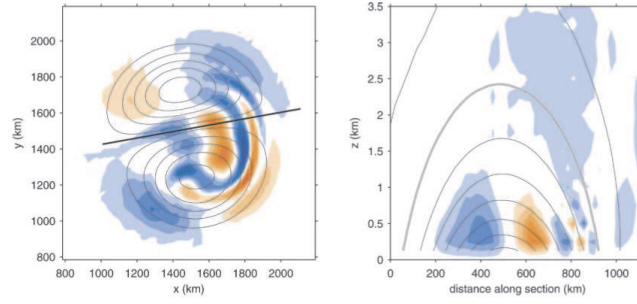
Pour des mouvements où les échelles de temps entre les mouvements équilibrés et les ondes inertie-gravité sont bien séparées ( $Ro \ll 1$ ), l'émission d'ondes ne peut pas être décrite par la théorie de Lighthill. Le couplage des deux types de mouvements va être rendu possible par l'advection, par effet Doppler permettant des vitesses de phases intrinsèques identiques dans le cas des instabilités agéostrophiques de type Rossby-Kelvin vue précédemment et par un mécanisme similaire dans le cas d'émissions transitoire d'ondes dans des perturbations cisailées (Vanneste et Yavneh (2004)).

- *Phénomène de capture d'ondes*

Dans les analyses précédentes, les ondes de gravité produites sont cependant d'échelle supérieure ou égale aux mouvements équilibrés. Or pour les jets et les fronts, les ondes observées ou simulées numériquement sont de plus petite échelle que les mouvements équilibrés et le mécanisme d'émission d'ondes est encore différent.



**Fig 4.15.:** a) Ondes émises lors d'un cycle idéalisé barocline a) Divergence horizontale (position du jet indiqué par les contours de géopotentiels en lignes fines) (O'sullivan et Dunkerton, 1995). b) carte de la divergence du vent horizontal pour une simulation d'instabilité barocline d'un jet sur le plan-f. Les lignes noires correspondent aux contours de vorticité potentielle (Plougonven et al., 2005).



**Fig 4.16.:** Ondes inertie-gravité émises par un dipôle : Gauche : Vue horizontale de la vitesse verticale et contours (lignes noires) de la température potentielle. Droite : Coupe verticale suivant le segment noir épais de la vue de gauche (Snyder et al., 2007).

Ainsi, Plougonven et Snyder (2005) ont montré que les ondes présentes dans les simulations idéalisées de cycles de vie barocline pour un fluide continûment stratifié de O'sullivan et Dunkerton (1995) ne sont pas dûes à une émission proprement dit du type de celle de Ford (1994) mais à une excitation d'ondes où des effets de propagation interviennent de sorte que la connaissance de la source seule ne suffit pas à décrire les ondes émises. Au contraire, c'est le développement non-linéaire de l'instabilité barocline et l'environnement particulier dû à l'écoulement (cisaillement et champ de déformation importants) qui influe sur les propriétés du paquet d'ondes émis (orientation et contraction des ondes, fréquence intrinsèque). Ce phénomène de 'capture d'ondes' présenté initialement par Bühler et McIntyre (2005) inhibe alors les ondes de grandes longueurs d'ondes et sélectionne la production d'ondes courtes. De même l'émission d'ondes par un dipôle en stratification continue étudiée par (Snyder et al., 2007) a bien été expliqué par ce phénomène de capture d'ondes impliquant les interactions ondes-écoulement pour le cas d'un dipôle (figure 4.16).

### Etudes expérimentales

Les études expérimentales sur les émissions d'ondes spontanées sont difficiles du fait des faibles valeurs de l'amplitude des ondes se propageant dans un écoulement vortical. Afanasyev (2003) a mis en évidence l'émission d'ondes inertie-gravité lors de la collision de deux dipôles en translation dans un fluide linéairement stratifié et pour une expérience d'instabilité barocline de jet côtier (Afanasyev et al., 2008) mais l'interprétation du mécanisme d'émission est délicat du fait de la complexité de l'écoulement. Par ailleurs, les travaux expérimentaux de Riedinger (2009) ont mis en évidence des radiations d'ondes dans le cas par exemple d'un vortex de Lamb-Oseen géostrophique.

Pour le cas de l'instabilité barocline, Lovegrove et al. (2000) et Williams et al. (2005, 2003) ont mis en évidence des perturbations de petites échelles sur un

front barocline pour un fluide à deux couches et les identifient comme des ondes inertie-gravité d'après la mesure de leur relation de dispersion. Williams *et al.* (2005) calcule dans une simulation numérique associée le terme non linéaire sources de l'équation 4.9 et remarque que des valeurs intenses de ce 'terme de radiation de Lighthill' coïncident avec les positions sur le front barocline des petites ondes. Il suggère ainsi que les ondes inertie-gravité sont de type spontanément émises et compatible avec la théorie de Lighthill. Cependant le critère de validité de la théorie de Ford (Froude petit) n'est pas vérifié et le terme de Lighthill utilisé se place dans une théorie barotrope étendue ici à une couche en eau peu profonde barotrope avec gravité réduite. L'interprétation donnée est donc sujette à contestation et on s'attachera à explorer la nature des petites perturbations présentes aussi dans les expériences de front réalisées au cours de cette thèse.



## 5. Outils expérimentaux et numériques

Afin d'étudier les instabilités et les perturbations de petite échelle sur le front, on s'appuie sur

- des expériences en laboratoire afin de déterminer le régime des instabilités.
- des simulations directes permettant l'exploitation de données 3D des différents champs de l'écoulement.
- des comparaisons avec des résultats d'analyse de stabilité linéaire basés sur une méthode de collocation et obtenus par J. Gula et al au laboratoire LMD à Paris.

### 5.1. Dispositif expérimental

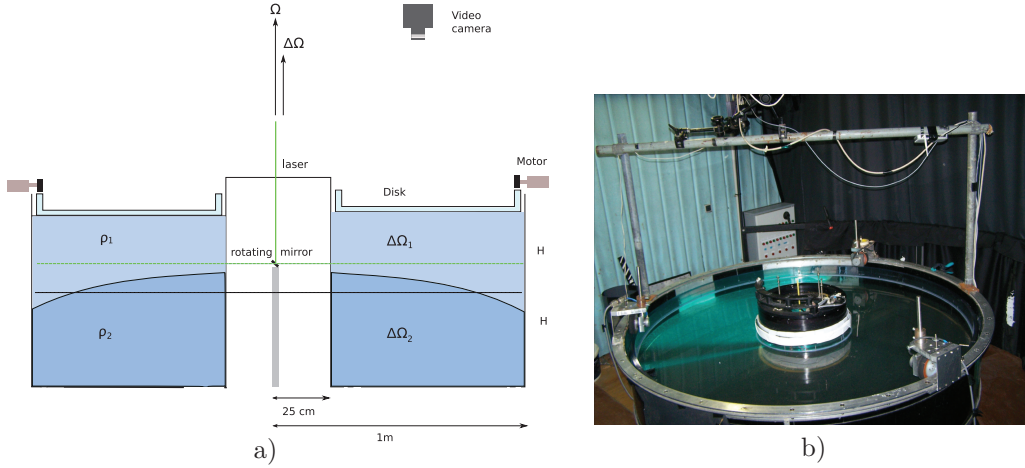
#### 5.1.1. Montage expérimental

Deux configurations expérimentales ont été utilisées :

- *Configuration annulaire* d'entrefer 75cm. Les hauteurs des couches d'eau sont de l'ordre de 13.5cm. Le disque supérieur est entraîné par des roues associées à des moteurs pas à pas. Le faisceau laser vertical est transformé en nappe horizontale via un miroir tournant de rotation rapide par rapport à la fréquence de la caméra (figure 5.1). La hauteur de la nappe laser est ajustée via le déplacement vertical du support du miroir tournant. A la fois la vitesse du disque et la vitesse de l'ensemble de la table sont contrôlées sous labview avec la possibilité d'effectuer une rampe lente d'augmentation de la rotation de base pendant trois heures. Une caméra cohé avec un objectif de 8mm grand angle ('fish eye') permet la visualisation de l'ensemble de la cuve. La déformation engendrée sur l'image est corrigée par un algorithm de la toolbox caltec\*. Suivant les expériences, certaines prises de vues de côté ont été effectuées.

---

\*. [http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib\\_doc/](http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib_doc/)



**Fig 5.1.:** *Dispositif expérimental en configuration annulaire a) Schéma  $H=13.5\text{cm}$ . la ligne noire pointillée représente la position de l'interface au repos. b) Photographie du dispositif.*

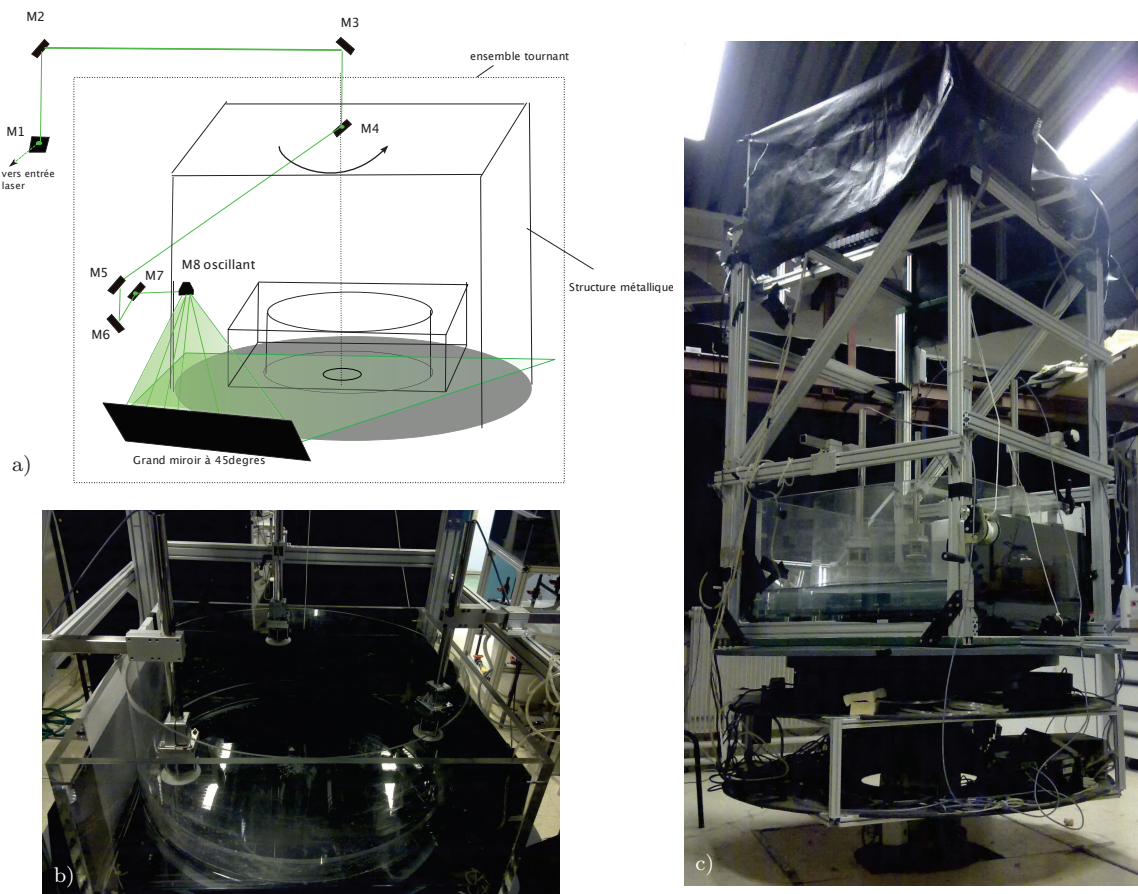
- *Configuration cylindrique* avec une cuve de 93cm de diamètre et 50cm de profondeur. A nouveau trois roues associées à des moteurs pas à pas (branchés en parallèle sur un contrôleur anaheim) permettent la rotation du disque supérieur. Le miroir oscillant, synchronisé au temps d'exposition de la caméra, est placé sur un bras pouvant se translater en contrôlant un autre moteur pas à pas. Cela permet de créer dans la cuve soit une nappe verticale au milieu de la cuve soit une nappe horizontale de hauteur donnée en plaçant le miroir oscillant sur le côté et en utilisant un grand miroir à  $45^\circ$  (figure 5.2). Deux caméras Dalsa 1M60 sont associées aux prises de vues de dessus et de côtés munies d'un objectif Nikon de 20mm et de 50mm respectivement. La rotation de l'ensemble est contrôlée sous labview avec la possibilité de fixer la rotation ou d'effectuer une rampe.

### 5.1.2. Milieu bicouche

Les solutions salées sont préparées dans deux réservoirs la veille ou quelques jours avant une expérience de manière à ce que l'eau soit à température ambiante. L'eau des deux couches est stockée dans deux réservoirs situés en hauteur pour permettre un remplissage par gravité et une pompe afin de garantir un débit constant. Il est parfois nécessaire de chauffer la veille le réservoir d'eau afin de permettre un dégazage de l'eau avant le remplissage pour limiter la présence de bulles sur le disque.

La réalisation du bicouche peut alors s'effectuer suivant deux méthodes : soit à l'aide de flotteurs, on remplit la couche du dessus après avoir rempli la couche inférieure, soit par un remplissage par le bas : à l'aide d'un système de faux fond et de mousse on remplit d'abord la couche du dessus puis celle du dessous. C'est cette dernière méthode qui a été utilisée dans la majorité des cas. On





**Fig 5.2.:** *Dispositif expérimental en configuration cylindrique avec a) le schéma de l'illumination laser b) les trois moteurs pas à pas c) vue globale du dispositif*



remplit toujours la deuxième couche en rotation de manière à éviter un mélange entre les deux couches. Les roues sont alors ajustées sur le disque à la hauteur finale. L'interface est de type tangente hyperbolique suivant la verticale avec une épaisseur totale de 2cm environ et subit peu de modification pendant la durée d'une expérience. La mesure de densité est effectuée avec un densimètre Anton Paar. A l'aide d'une petite pompe manuelle quelques ml de liquide sont prélevés et introduits dans un capillaire. La fréquence propre de résonance mécanique de l'ensemble capillaire-fluide (excité à l'aide de systèmes inductifs) dépendant de la masse du fluide prélevé, cela permet la mesure de la masse volumique du liquide avec une précision d'environ  $5e^{-4}g.cm^{-3}$ .

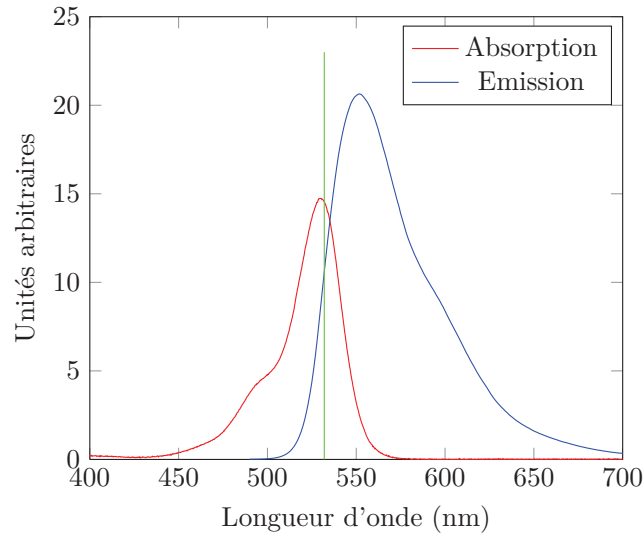
### 5.1.3. Techniques de visualisation

#### Fluorescence induite par laser

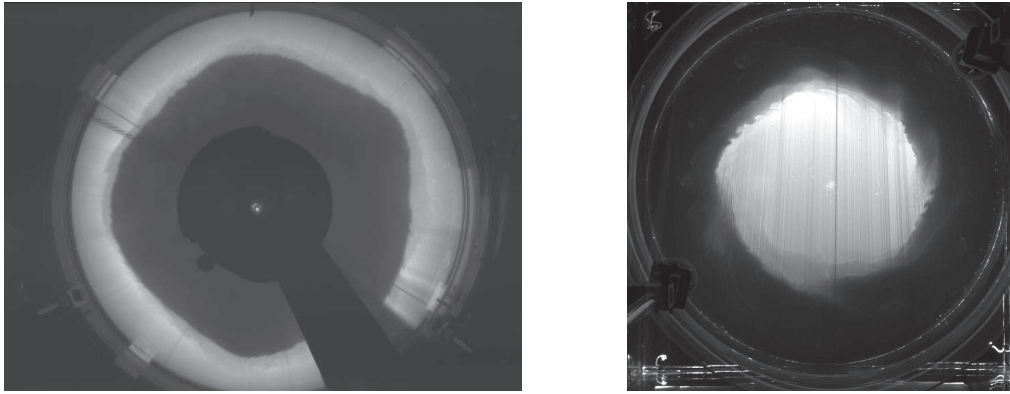
Cette technique permet de visualiser l'écoulement par l'introduction de colorant dans le fluide d'étude. Les lasers utilisés ici sont un laser Spectra-Physics à Argon de longueur d'onde principale 514,5 nm et un laser Coherent Verdi solide Nd :YVO<sub>4</sub> pompée par diode de puissance maximale 5W et de longueur d'onde 532 nm. On utilise alors la fluorescéine ou la rhodamine 6G qui sont des colorants fluorescents excités par le laser et ont un spectre d'émission décalé par rapport à la longueur d'onde du laser (figure 5.3). En plaçant devant l'objectif de la caméra un filtre passe-haut avec une coupure à 540nm (filtre LaVision ou des filtres gélatines Wratten Kodak 22 ou 21), on coupe les réflexions parasites de la lumière laser (sur la surface du disque par exemple) et on obtient une image qui ne dépend que de la lumière émise par le colorant.

Si la concentration en colorant est trop élevée, la luminosité n'est néanmoins pas uniforme sur le chemin de la nappe laser avec la région la plus éloignée très peu lumineuse du fait de l'absorption de la lumière le long du chemin (loi de Beer-lambert). En utilisant environ 10ml d'une solution préparée à une concentration de 0.478g/L dans une couche d'eau de 10cm dans la cuve cylindrique (concentration dans la cuve de l'ordre  $7e^{-5}$  g/L), on s'affranchit de cette inhomogénéité. La puissance laser est réglée entre 2 et 4W suivant la vue et les conditions et l'objectif de la caméra est ouvert à 2.8.

Bien que cette technique et les concentrations utilisées permettent une mesure quantitative de la concentration (régime présentant une relation linéaire entre l'intensité et la concentration), nous utilisons ici le colorant pour identifier la position de l'interface et les instabilités (position des crêtes des ondes, etc.). La majorité des expériences sont effectuées en introduisant un colorant en général dans la couche du dessus. La nappe laser horizontale placée au milieu des deux couches croise alors les deux couches dont l'interface est courbée (voir figure 5.1 ligne pointillée). La vue de dessus présente alors une zone centrale sombre sans colorant associée à la couche du dessous et une zone claire périphérique correspondant à la couche colorée (voir figure 5.4).



**Fig 5.3.:** Spectres d'émission et d'absorption de la rhodamine 6G (données de [omlc.orgi.edu](http://omlc.orgi.edu)). En vert, longueur d'onde du laser vert à 532nm.



**Fig 5.4.:** Visualisation d'un front réalisé avec un disque tournant dans le même sens que la rotation de base comme illustré dans la figure 5.1 et une nappe laser à travers les deux couches a) couche de dessus colorée b) couche de dessous colorée

La technique d'ajustement d'indice (*'index matching'*) a aussi été utilisée pour les expériences en configuration cylindrique : en ajoutant une quantité choisie d'alcool à 95% pur dans la couche d'eau douce, on peut modifier l'indice de réfraction de telle façon à ce que l'on obtienne deux couches ayant une différence de densité voulue mais un indice de réfraction identique dans les deux couches. La quantité d'alcool ajoutée a été estimée à partir des résultats de [Daviero et al. \(2001\)](#) et l'ajustement final des indices est affiné en mesurant les indices des deux solutions avec un réfractomètre Atago Pal-RI. cette technique d'ajustement d'indice permet d'éviter des déviations du faisceau laser lorsque celui-ci croise

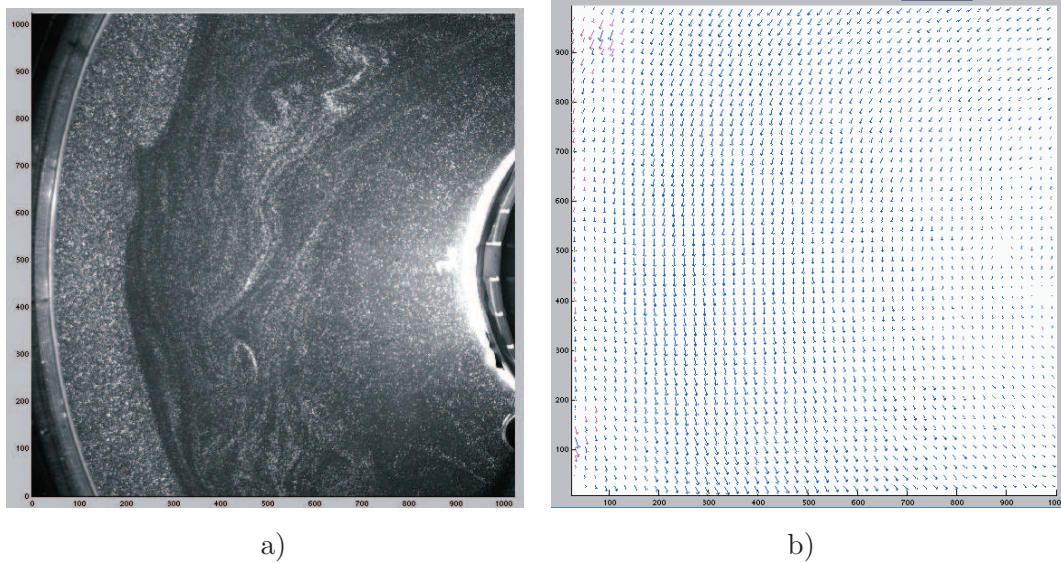
l'interface.

## PIV

La Vélocimétrie par Imagerie de particules a été essentiellement utilisée pour obtenir les profils de vitesse dans chaque couche dans le régime stable en configuration annulaire. Cette technique permet d'accéder aux champs de vitesse en se basant sur un suivi de particules injectées dans l'écoulement.

On utilise ici deux sortes de particules Orgasol de densités adaptées pour chacune des deux couches et de diamètre entre 20 et 60 microns. L'ensemencement est effectué à l'aide d'une tige et d'une seringue ou directement pour la couche du dessus lors du remplissage. Le procédé à la seringue ne permet jamais une répartition vraiment homogène des particules et il a fallu s'en accommoder pour ensemençer la couche du dessous. Le pompage d'Ekman a aussi un effet sur la distribution des particules et les amène vers le fond ou sur les côtés.

L'acquisition est réalisée à l'aide du logiciel Acquix et le calcul de champ de vitesse est réalisé avec les routines de corrélation du logiciel libre civx sous l'interface graphique sous Matlab uvmat (développée au LEGI à la plateforme Coriolis). On applique d'abord la routine civ1 suivie de patchs pour distinguer les probables faux vecteurs puis on exécute la routine civ2 pour améliorer le champ de vitesse.



**Fig 5.5.:** Exemple d'image utilisée pour les mesures de PIV a) et le champ de vitesse obtenu b).

A une hauteur donnée on enregistre plusieurs bursts de paires (ou plus ) d'images séparées par un  $\Delta t$  choisi au préalable en fonction d'une estimation de la vitesse du fluide (au maximum égale à celle du disque). Après un moyennage spatial de la vitesse azimuthale suivant l'angle azimuthal pour un burst donné,

on effectue une moyenne temporelle des profils radiaux pour différents bursts afin d'obtenir le profil moyen de vitesse azimuthale suivant le rayon pour cette hauteur donnée. En superposant tous les profils, on a un moyen d'estimer la dispersion autour du profil moyenné final due aux instabilités du milieu. Selon la hauteur à laquelle on fait la mesure et la position radiale, on a une déviation  $\Delta v_\theta$  qui varie entre 0.3 cm/s et 1 cm/s soit un écart relatif de 4 à 15 % dans un cas de grande dispersion.

Un des problèmes qui a parfois empêché une exploitation des expériences est la présence de bulles ou de mélange bulles/particules adsorbées sous le disque. En effet, les bulles sont lumineuses et peuvent être prises pour des particules. Même si un nettoyage est effectué après le remplissage de la première couche, il peut s'en former d'autres au cours de l'expérience et conduire à de nombreux vecteurs faux dans le champ de vitesse.

## 5.2. Modélisation numérique

### *Code*

Les simulations numériques ont été effectuées en utilisant un code à simulation directe (DNS) de [Verzicco et al. \(1997\)](#). Les équations de Navier-Stokes complètes 2.9 introduites section 2.2 sont écrites en coordonnées cylindriques et discrétisées sur un maillage non régulier suivant un schéma de différence finie central du second-ordre. Le système discrétisé est résolu à l'aide de la méthode à pas fractionné sur l'équation elliptique inversée en utilisant des développements trigonométriques dans la direction azimuthale et le paquet FISHPACK ([Swarztrauber, 1974](#)) pour les directions radiales et verticales. L'avancement temporel suit un schéma hybride de type Runge-Kutta d'ordre 3. La méthode numérique est la même que celle de [Verzicco et Camussi \(1997\)](#) et [Verzicco et Orlandi \(1996\)](#) où on peut trouver des détails plus approfondis sur la méthode numérique. En outre, des directives openMP sur ce code en fortran 77 permettent d'utiliser une exécution parallélisée avec des processeurs multiples à mémoires partagées.

### *Résolution spatiale et viscosité, Reynolds et nombre de Schmidt*

Pour une simulation numérique directe, les équations complètes sont résolues sans aucune modélisation contrairement aux simulations dites des grandes échelles (LES). Dans le cas de la théorie de la turbulence homogène isotrope, une cascade directe d'énergie s'effectue avec un flux d'énergie constant jusqu'à l'échelle de Kolmogorov où la viscosité dissipe l'énergie. Pour assurer la stabilité du calcul et que la simulation directe ait un sens, on considère que la taille de la maille doit être du même ordre de grandeur que l'échelle de Kolmogorov de taille  $L_K = Re^{-3/4} \times L$  avec  $L$  l'échelle intégrale et  $Re$  le nombre de Rey-

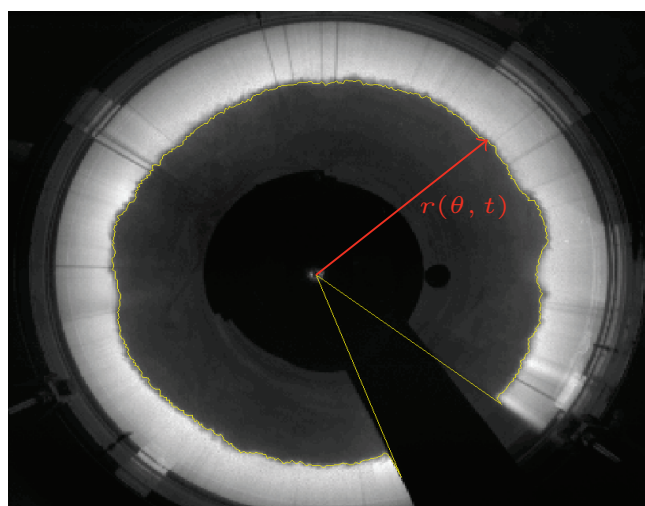
nolds à grande échelle. Si la maille est plus grande que l'échelle de Kolmogorov, on accumule de façon non physique de l'énergie non dissipée à l'échelle de la maille et le calcul peut être déstabilisé. Les nombres de Reynolds basés sur la rotation du disque pour les expériences de laboratoire sont de l'ordre de 50000 ce qui imposerait une résolution très grande et des temps de calculs énormes. Pour une grille moins fine mais adaptée aux phénomènes à observer (instabilités de moyenne et de petite échelle, couches limites à résoudre), on choisira alors d'augmenter la viscosité de la simulation avec un nombre de Reynolds plus faible pour respecter l'échelle de dissipation. Cependant le nombre de Reynolds choisi ne doit pas être trop faible pour que les mouvements de petites échelles ne se dissipent pas trop rapidement.

Parallèlement, un nombre de Schmidt élevé est nécessaire pour reproduire la dynamique d'un front. Dans le cas de solutions salées le nombre de Schmidt vaut 700 ce qui requiert numériquement une résolution très fine et beaucoup de temps de calcul. Si le nombre de Schmidt est trop faible, les effets diffusifs dissipent l'interface de densité trop rapidement avant même que le front ne devienne instable. Pour des écoulements avec un nombre de Schmidt élevé, comme la diffusion scalaire est plus faible que la diffusion visqueuse, l'échelle en dessous de laquelle aucun gradient de densité ne subsiste du fait de la diffusion est plus petite que l'échelle de Kolmogorov. Cette petite échelle où la diffusion scalaire se met en place est appelée échelle de Batchelor et s'écrit :  $L_B = L_K \times Sc^{-1/2}$  (Batchelor (1959), Buch et Dahm (1996)). En toute rigueur, la résolution requise pour la simulation directe d'un écoulement stratifié à nombre de Schmidt supérieur à 1 doit alors être estimé à partir de l'échelle de Batchelor (Rahmani (2011)). Cependant, les résolutions choisies ici ont été estimées plutôt à l'aide l'échelle de Kolmogorov (pas de grille de 1 à 5 fois  $L_K$ ) et ne respectent pas forcément la précision de l'échelle de Batchelor.

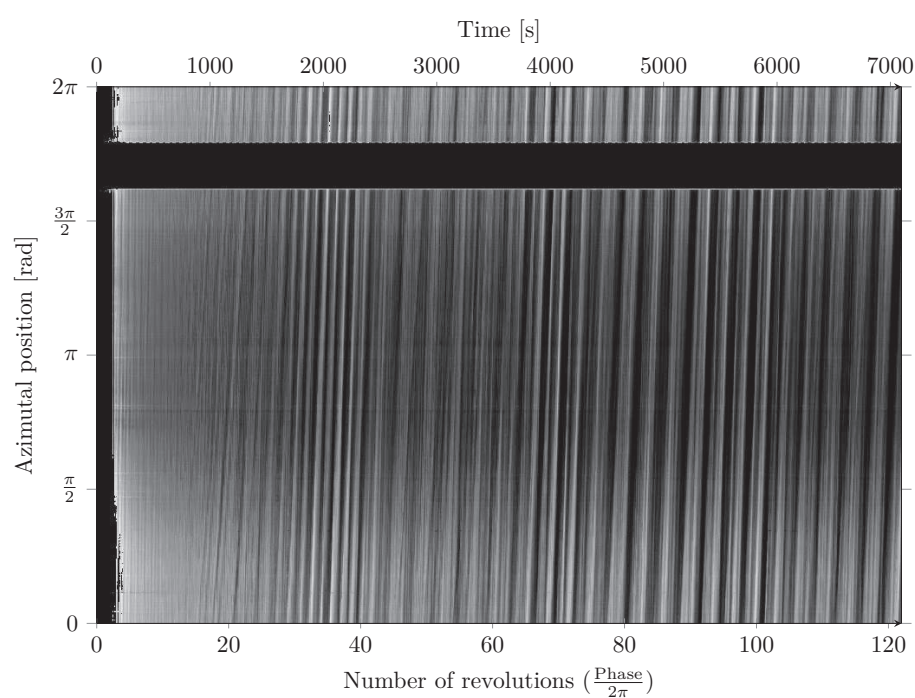
Ainsi l'ensemble des ces contraintes ont amené à choisir une grille de  $1 \times 700 \times 700$  un nombre de Schmidt de 700 et un nombre de Reynolds de 3500 ou moins lors de l'étude spécifique de la circulation secondaire et de choisir une grille de  $1201 \times 301 \times 257$  pour une résolution spatiale de 1 à 5mm avec un nombre de Schmidt de 100 et un Reynolds de 10000 pour la simulation 3D de l'écoulement.

### 5.3. Traitement et analyse d'images

Les images de colorant sont traitées pour obtenir le contour de l'interface par un script de seuillage pour chaque position angulaire en cylindrique ou en utilisant les détections de contours de Matlab et en isolant le contour correspondant à l'interface (figure 5.6). On peut obtenir ainsi la matrice  $r(\theta, t)$  correspondant à la position de l'interface par rapport au centre pour un temps et une position azimuthale donnée. Cela permet de tracer ensuite un diagramme espace-temps comme celui illustré figure 5.7 où l'on trace en niveau de gris la valeur de  $r$ . A  $t$  fixé, les alternances de crêtes et de creux se retrouvent en bandes claires



**Fig 5.6.:** Détection de la position radiale de l'interface à un temps donné.



**Fig 5.7.:** Exemple de diagramme position angulaire-temps avec en niveaux de gris les valeurs de  $r(\theta, t)$  indiquant les creux (en foncé) ou les crêtes (en clair)



et sombres et indiquent le nombre d'onde spatial. A une position azimuthale donnée, on accède à la période du mode. A l'aide de ce diagramme de Hovmüller, on peut suivre l'évolution des modes et mesurer les vitesses de phase des modes en faisant une régression linéaire de la pente décrite en suivant la propagation d'une crête. Une transformée de Fourier discrète en angle sur  $r(\theta, t)$  a été effectuée afin de regarder l'évolution de l'amplitude des modes en temps. Néanmoins, les mesures quantitatives de vitesse de phase qui seront comparées avec les résultats de stabilité linéaire ont été réalisées directement sur le diagramme de Hovmüller pour éviter des biais de la transformée de fourier due à la zone tronquée (entre  $3\pi/2$  et  $2\pi$ ) résultant de la présence d'une plaque de protection sur le champ. L'évolution temporelle des amplitudes des modes permet une estimation de taux de croissance mais le relevé systématique de tels taux de croissance ne sera pas présenté du fait des effets non linéaires et des amplitudes finies loin du régime de croissance de perturbations linéaires d'amplitude très faibles. En utilisant un algorithme similaire à celui utilisé sur les images expérimentales, des diagrammes espace-temps seront aussi tracés pour le cas des champs numériques.

## 5.4. Confrontation aux calculs de stabilité linéaire

Les résultats expérimentaux et numériques seront comparés à ceux de stabilité linéaire obtenus au Laboratoire de Météorologie Dynamique à Paris. Ceux-ci utilise le modèle en eau peu profonde (shallow-water) à deux couches pour la configuration annulaire (Gula (2009)) qui s'écrit :

$$D_j u_j - \left(f + \frac{v_j}{r}\right) v_j - r \Omega^2 = -\partial_r \pi_j \quad (5.1)$$

$$D_j v_j + \left(f + \frac{v_j}{r}\right) u_j = -\frac{\partial_\theta \pi_j}{r} \quad (5.2)$$

$$D_j h_j + \nabla \cdot (h_j \mathbf{v}_j) = 0 \quad (5.3)$$

$$(5.4)$$

où  $\vec{v}_j = (u_j, v_j)$ ,  $h_j$  et  $\pi_j$  sont la vitesse, l'épaisseur et la pression normalisée par la densité (géopotential) dans la couche  $j$ ,  $D_j$  représentant les dérivées lagrangiennes dans chaque couche.

La méthode des modes normaux et la résolution des équations aux valeurs propres associée est effectuée à l'aide d'une méthode pseudo-spectrale de collocation et permet d'obtenir la structure du champ de vitesse et de pression dans les couches ainsi que la vitesse de phase et le taux de croissance des modes.

Le modèle en eau peu profonde suppose une couche mince (rapport d'aspect  $\ll 1$ ) et que les variables ont une variation faible selon la verticale par rapport à l'horizontale. La validité du modèle dans la configuration expérimentale choisie peut être estimée par le produit du carré du rapport d'aspect et du nombre de Rossby dans la couche  $j$ ,  $\frac{H_j^2}{L} Ro_j$ , qui donne l'ordre de grandeur du rapport entre

l'accélération de la vitesse verticale dans la couche  $j$  et du gradient vertical de pression. Avec un rapport d'aspect dans chaque couche de l'ordre de 0.17 et un nombre de Rossby typique entre 0.1 et 1, on a  $(\frac{H_j}{L})^2 Ro_j$  entre 0.003 et 0.03 qui assure que l'accélération verticale est négligeable, que l'équilibre hydrostatique la validité du modèle sont assurés.





## 6. On density interfaces in rotating fluids

Cette étude sur les interfaces de densités en milieu tournant a fait l'objet d'un proceeding lors du 7ème symposium sur les fluides stratifiés 2011 à Rome. Nous incluons en anglais une version modifiée de celui-ci.

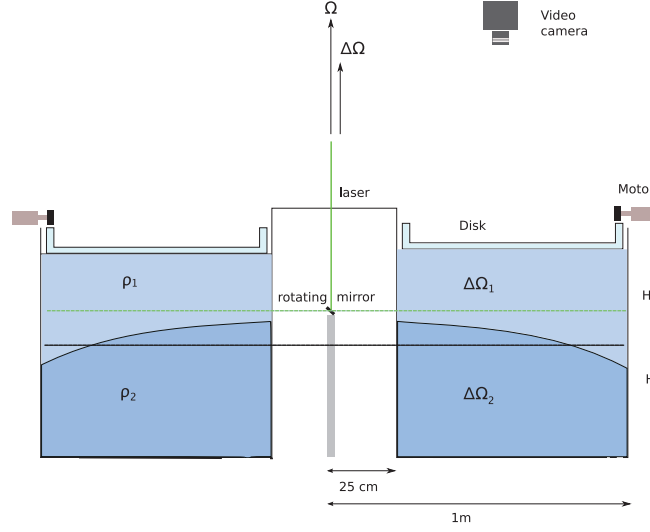
Density interfaces are common near fronts in the atmosphere and the oceans. In a rotating system these density interfaces are subject to secondary circulations, but their exact structure in the presence of a continuous density interface is so far unknown and subject to research. Employing a numerical experimental approach, we consider a differentially rotating two-layer fluid with the upper layer rotating faster than the lower layer due to a rotating disk at the surface. We consider the secondary circulation and the properties of the interface as a function of the Rossby number, Richardson number and Schmidt number. During spin-up, a corner jet is formed by the radial ejection of fluid at the top Ekman-layer near the disk and by continuity a meridional circulation is established in the upper layer. For high enough Schmidt numbers ( $> 20$ ), we find interfacial Ekman layers in the presence of a miscible interface that control the secondary circulation in top and boundary layers. These Ekman layers disappear with the decreasing Schmidt number, whereas for small Ro-numbers, additional interfacial layers form.

### 6.1. Introduction

Ekman layers play an important role for frontal dynamics and frontal instability. In order to study the dynamics of a density interface in a rotating fluid, we consider a two-layer salt-stratified fluid in a rotating annulus. The upper layer is driven by a cyclonic rotating annular disk at the surface (see Figure 8.1). This type of experiment has been considered in previous studies ([Hart, 1972](#); [Williams \*et al.\*, 2005](#)) in the context of frontal instabilities.

The existence of Ekman layers at the interface of immiscible fluids have been considered by e.g. [van Heijst \(1984\)](#) and [Maeland \(1982\)](#), but their dynamics are not well understood for interfaces between miscible fluids (see [Hewitt \*et al.\*, 2001](#); [Wirth, 2010](#); [Johnson et Ohlsen, 1994](#); [Brady et Lopez, 2011](#)). Either the density stratification is sandwiched between two Ekman layers or the density interface thickness is larger than the Ekman layer thickness. In both cases the structure of possible Ekman layers as well as the influence of the Rossby number on these

layers are unknown. In order to investigate Ekman circulation near a density interface, we vary Schmidt and Reynolds number to characterize diffusive effects, and the Rossby number for rotational effects. We use a numerical code for which the velocity profiles are validated against the experimental measurements.



**Fig 6.1.:** Sketch of the experimental setup. An annulus is filled with a two-layer fluid and rotating at the rotating speed  $\Omega$  driven by a rotating disk at the surface with speed  $\Delta\Omega$  in rotating frame of reference. The initial density difference is  $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$  with  $\rho_1$  and  $\rho_2$  the density of the upper and lower layer. Black line : parabolic interface. Green line : laser beam.

## 6.2. Governing equations and numerical methods

In the Boussinesq approximation the governing equations are given by

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_1} - 2\vec{\Omega} \times \vec{u} - g \frac{\rho - \rho_1}{\rho_1} \hat{\mathbf{z}} + \nu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\rho - \rho_1}{\rho_1} \Omega^2 r \hat{\mathbf{r}} \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) C = \kappa \nabla^2 C \quad (6.2)$$

with  $\rho = \rho_1 + \alpha C$  where  $C$  is the scalar quantity salinity and  $\kappa$  its diffusivity.

Following Hart 1972 the equations are non dimensionalised with disk velocity  $T = \frac{1}{\Delta\Omega}$  for time,  $L = R_2 - R_1$  for the length scale,  $U = \Delta\Omega L$  for the velocity,  $p = \rho_1 U^2$  for the pressure and  $\alpha C = \Delta\rho$  for the concentration. Substitution of these scales yields

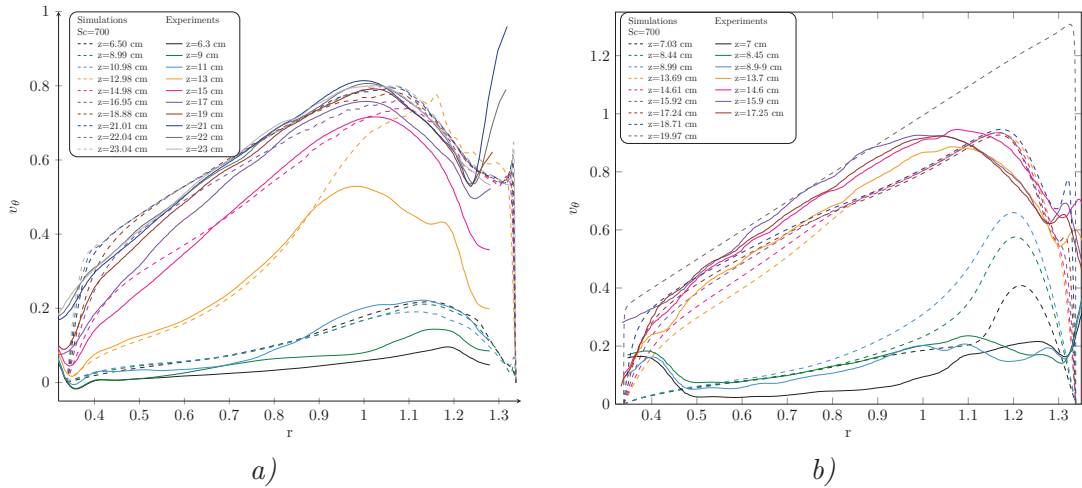
$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla} p - \frac{1}{R_o} \hat{\mathbf{k}} \times \vec{u} - \frac{B_u}{R_o^2 \frac{H}{L}} C \hat{\mathbf{z}} + \frac{1}{R_e} \nabla^2 \vec{u} + \frac{g'/g}{4R_o^2} C r \hat{\mathbf{r}} \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) C = \frac{1}{Pe} \nabla^2 C, \quad (6.4)$$

where  $R_o = \frac{\Delta\Omega}{2\Omega}$ , the Rossby number,  $Re = \frac{\Delta\Omega L^2}{\nu}$  the Reynolds number based on disk velocity. The Re number is linked to the Ekman number  $\frac{1}{Re} = \frac{E_k}{R_o} \left(\frac{H}{L}\right)^2$  with  $E_k$  the vertical Ekman number  $E_k = \frac{\nu}{2\Omega H^2}$  and the Burger number  $B_u = \frac{g'H}{4\Omega^2 L^2}$ . The acceleration ratio is given by  $\Gamma = \frac{g'}{g} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}$ , the aspect ratio by  $\gamma = H/L$  with  $H = H_{\text{reduced}} = \frac{2H_1 H_2}{H_1 + H_2}$  and  $L = R_2 - R_1$ . Finally  $Pe = \frac{\Delta\Omega L^2}{\kappa}$  is the Peclet number and verifies  $Pe = Re \cdot Sc$  where Sc is the Schmidt number  $Sc = \frac{\nu}{\kappa}$ .

Equations 3 and 4 are written in cylindrical coordinates  $(v_r, v_\theta, v_z)$  and discretized on a staggered mesh by central second-order accurate finite difference approximation. The resulting discretized system is solved by a fractional-step procedure with the elliptic equation inverted using trigonometric expansions in the azimuthal direction and the FISHPACK package (Swarztrauber, 1974) for the other two directions. The time advancement of the solution is obtained by a hybrid low-storage third-order Runge-Kutta scheme. The numerical method is the same as that described in Vericco et Orlandi (1996) and Vericco et Camussi (1997) where further details of the numerical procedure can be found.

A comparison between numerical simulations and laboratory experiments is all the more accurate as all dimensionless parameters match. However, the value of the Schmidt number corresponding to experiments with salty fluids is 700 and requires a high grid resolution and a huge CPU time to simulate. In order to increase the resolution we consider an axisymmetric flow with  $N_\theta \times N_r \times N_z = 1 \times 700 \times 700$  and  $Sc=20$  or 700. The effects of such high Schmidt numbers on the calculations is that singularities can occur. However, numerical instabilities if they exist, appear near the solid boundaries where the velocity gradients are large, and not near the interface where the velocity and density gradient are smooth so that interfacial dynamics are well captured as also the comparison with the experimental measurements below suggest.



**Fig 6.2.:** Comparison between PIV profiles and numerical simulations for similar parameters and Schmidt number 700.

## 6.3. Numerical and experimental results

### 6.3.1. Azimuthal velocity profiles in stable regime

Figure 6.2 shows the radial profiles of azimuthal velocity (averaged in time and angle) measured with PIV method at several heights in the fluid. The flow was stable in this case, and the front axis-symmetric. The numerical results (dashed lines) reproduce in good agreement the measured velocity profiles. At  $Sc=700$  the simulations capture well the deviation from solid-body rotation in the lower layer (see figure 6.2a,  $r=1-1.2$ ). For  $Sc=20$  (not shown), the maximum in azimuthal velocity is less well reproduced (in amplitude as well as in position).

These radial profiles also develop an inflection point very near the sidewall as shown in differentially rotating experiments for homogeneous fluids by Lopez et Marques (2010). These inflection points are compatible with Fjortoft's necessary condition for inviscid instability suggesting an instability located in the Stewartson layers.

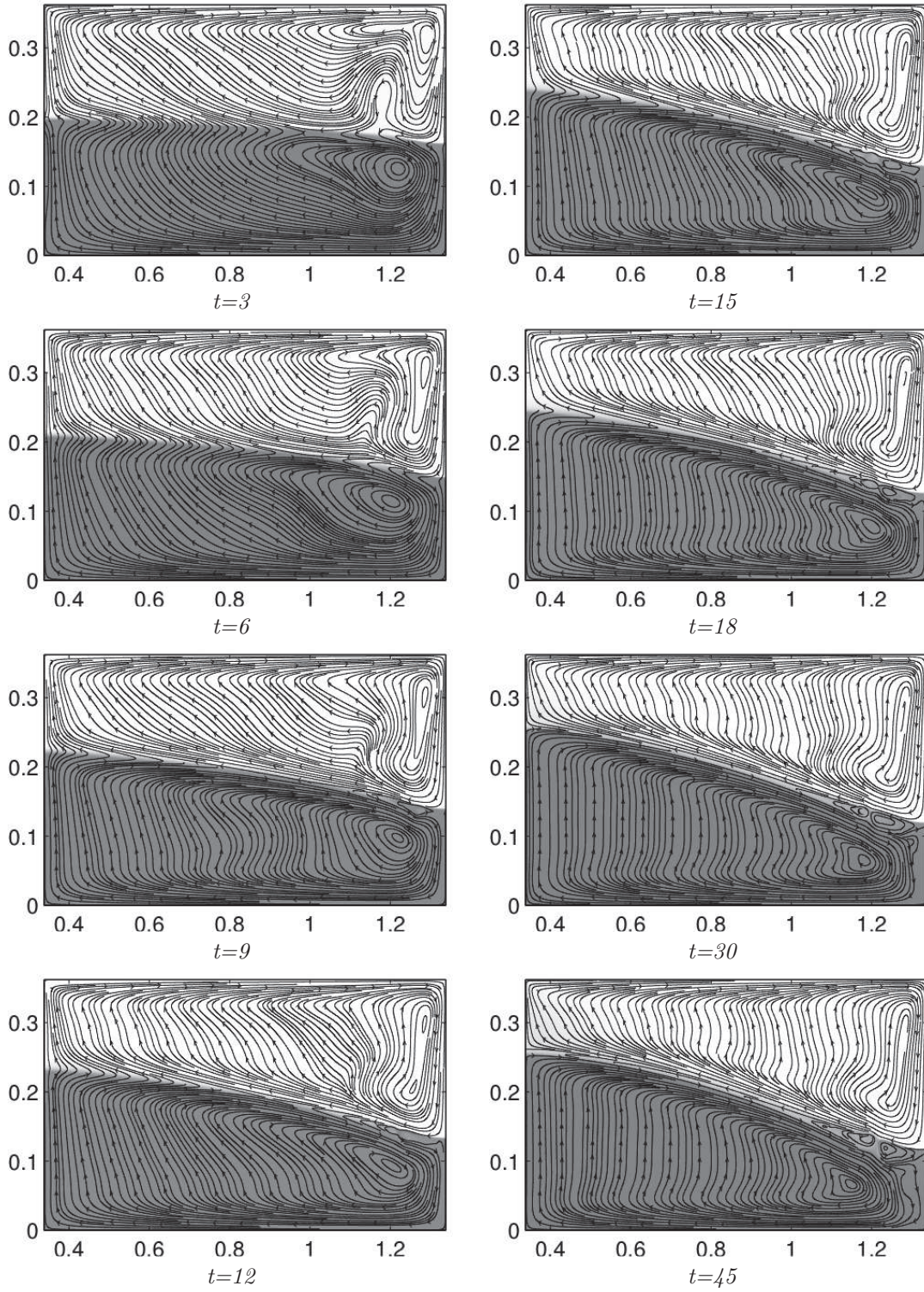
### 6.3.2. Axisymmetric flow : meridional characteristics of the flow

As the flow is axisymmetric, the vorticity field can be described by  $\vec{u} = (v_\theta, v_z, v_r) = (-\frac{\partial\psi}{\partial z}, \frac{\gamma}{r}, \frac{\partial\psi}{\partial r})$  where contours of  $\gamma = rv_\theta$  and the streamfunction  $\psi$  are depicting respectively vortex lines and streamlines.

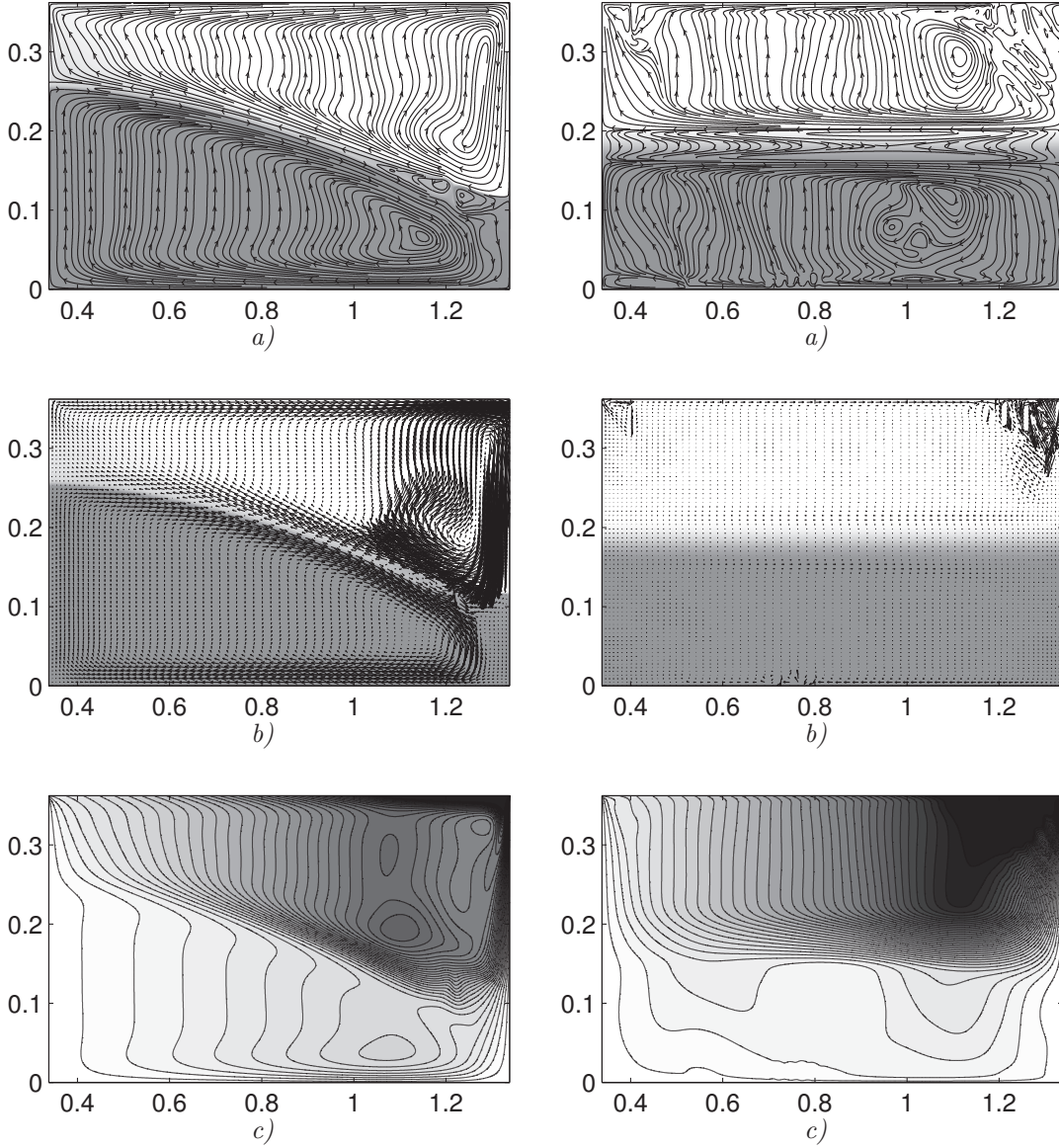
As shown in figure 6.3, during the spin-up process the fluid in the Ekman-layer near the disk is spun-up and ejected to the sidewall. The large amount of ejected fluid can not entirely be absorbed by the side-wall Stewartson-layer and forms an intense corner jet (Spence et al., 1992; Lopez et Marques, 2010). By continuity, this fluid recirculates back into the Ekman-layer near the disk. The initially inclined streamlines in both layers (figure 6.3) become almost vertical when the flow becomes quasi-geostrophic as can be expected according to the Taylor-Proudman theorem. In time, we notice that the interfacial structure changes from thin (figure 6.3 at  $t=3$ ) to a larger more complex structure, as discussed in the next section.

Figure 6.4 illustrates the quasi-steady axisymmetric flow state for the numerical simulation with  $Sc=700$  for two different Rossby numbers  $Ro=0.4861$  (figure 6.4 left) and  $Ro=0.0046$  (figure 6.4 right). In both cases the upper layer is spun up via Ekman circulation driven by the disk. The vortex lines in the interior flow of each layer are vertical, showing that the fluid can be approximately in solid-body rotation as confirmed by the azimuthal velocity profiles of figure 6.2. We notice several differences between the two flows and the transfer of momentum to the lower layer. For small  $Ro$  number (right) each layer has a quasi-geostrophic interior. The interface is almost flat, the corner jet is very localized, and the interface is relatively thick. The lower layer is set into motion





**Fig 6.3.:** Time evolution of streamlines during the spin-up process. numB :  $Sc=700$ ,  $g'=0.06$ ,  $Ro=0.4861$ ,  $Bu=0.3147$  and  $Re=3500$



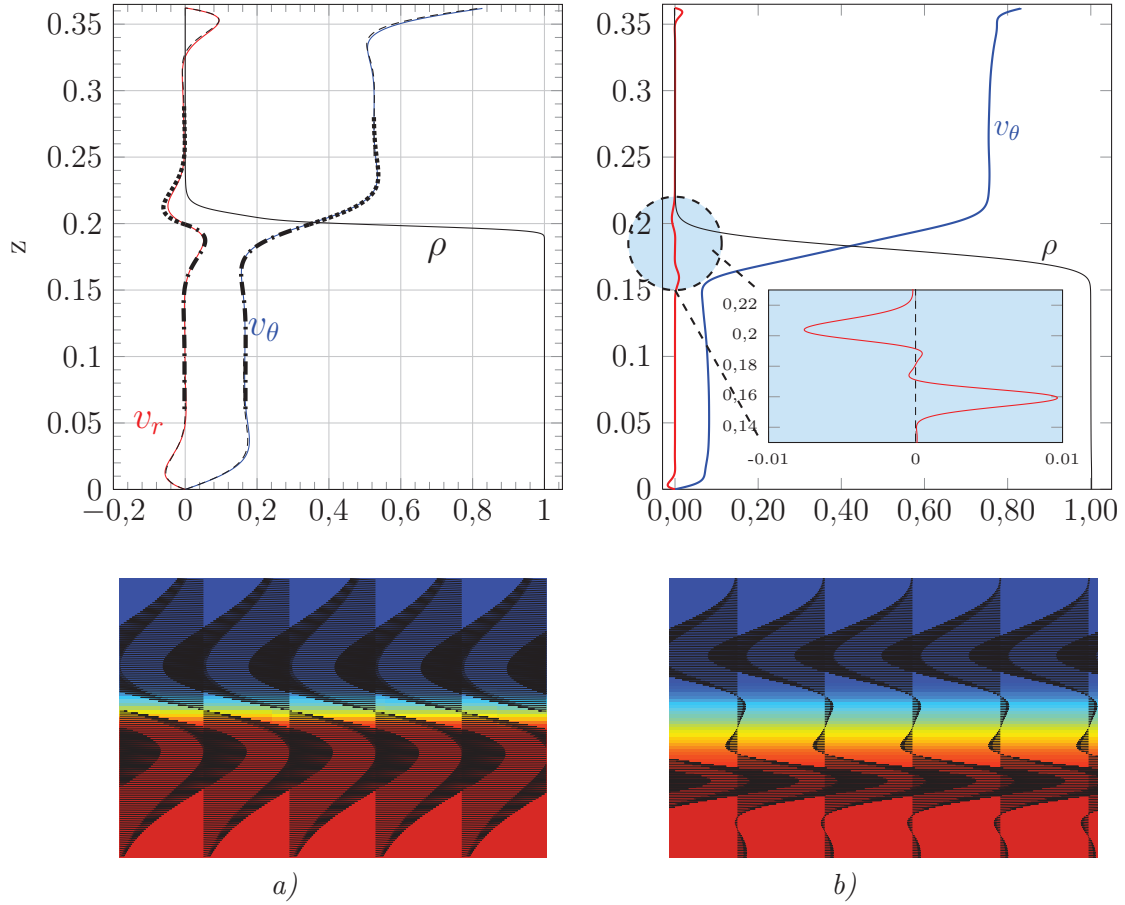
**Fig 6.4.:** *Axisymmetric quasi-steady state. Left : simulation numB at  $t=45$ . Right : numE at  $t=30$ . Both : a) Streamlines (background : shading for density) b) Meridional vector velocity field c) Vortex lines (contours of  $\gamma = rv$  in the range  $[-1,1]$  from white to black). numE : same parameters as numB except  $Ro=0.0046$  and  $Re=547.60$ . (Due to the high shear in the corner region there is a local numerical instability near the edge of the rotating disk, as in b) right.)*

via diffusion of momentum from the upper layer. As a consequence, the interfacial layer has a more complex structure, while there is a relatively weak motion in the lower layer. For 'high' Ro-number (left), the interface is curved by the shear, involving stretching of background vorticity in the lower layer. Also the



bending of vertical vorticity is believed to enhance the meridional circulation (see [Brady et Lopez, 2011](#)). As a consequence, Ekman circulation in the lower layer sets in at an early stage. The complex interfacial structure that is due to diffusion does not have time to develop.

### 6.3.3. Interfacial Ekman layers



**Fig 6.5.:** Upper : Vertical dimensionless velocity profiles (line). a) *numB* at  $t=18$ . Thin dashed lines : analytical function for the bottom and upper Ekman layer ( $v_{r_g}$  et  $v_{\theta_g}$  adjusted parameters). Dashed and dotted line and the dotted line corresponds to analytical adjusted Ekman layers considering a virtual horizontal solid boundary in the middle height with the same  $\delta_e$  and with adjusting parameters  $v_{r_g}$  and  $v_{\theta_g}$ . b) *numE* (same parameters but  $Ro$  smaller). Insert : Zoom on the  $z=0.18$  region. Lower : zoom on meridional vector field near the interface. Density field in color.

Strictly speaking, an Ekman layer is a boundary layer for a solid or a free surface with stress adjusting geostrophic velocities in the interior to the boundary conditions ( [Vallis \(2006\)](#) or [Pedlosky \(2001\)](#)). For small Rossby number and



uniform stress, the interior is in geostrophic balance and  $v_{\theta_g} = v_{\theta}(r, \theta)$  is independent of the vertical coordinate. The Ekman boundary satisfies the following boundary conditions

$$\begin{aligned} z = 0 : \quad & v_r = v_{\theta} = 0 \\ z = \delta_e : \quad & v_r = v_{r_g}, v_{\theta} = v_{\theta_g}, w = w_g \end{aligned} \quad (6.5)$$

and for the velocities

$$2\vec{k} \times \vec{v}_E = -\vec{\nabla} p + E_k \nabla^2 \vec{v}_E. \quad (6.6)$$

Solving this equation with the boundary conditions leads to the usual Ekman spiral

$$\begin{aligned} v_{rE} &= v_{r_g} + \left[ -v_{r_g} \cos(z/\delta_e) - v_{\theta_g} \sin(z/\delta_e) \right] \exp(-z/\delta_e) \\ v_{\theta E} &= v_{\theta_g} + \left[ v_{r_g} \sin(z/\delta_e) - v_{\theta_g} \cos(z/\delta_e) \right] \exp(-z/\delta_e) \end{aligned} \quad (6.7)$$

where  $v_{r_g}$  and  $v_{\theta_g}$  correspond to the geostrophic interior velocities.

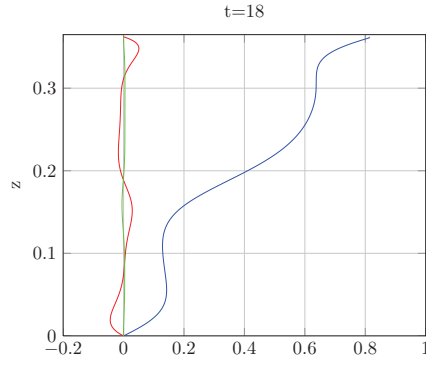
Figure 6.5 a) represents the velocity profiles for simulations numB at  $t=18$ . The analytical velocities for the top and bottom Ekman layer are obtained, using  $v_{r_g}$  and  $v_{\theta_g}$  as fit parameters (figure 6.5 dashed lines). The effective Ekman layer thickness  $\delta_e$  is measured a posteriori using classical results for the Ekman spiral, i.e. the distance from the wall of the first zero of  $v_r$  is  $\pi\delta_e$ . This gives  $\nu_{\text{eff}} = 2.6 \times 10^{-5} \text{ m s}^{-2}$  for the simulation numB in coherence with the viscosity given by the input Re-value  $\nu_{\text{eff}} = 1.6 \times 10^{-5} \text{ m s}^{-2}$ . The dash-dot line and the dotted line correspond to the analytically obtained Ekman layers for a virtual horizontal solid boundary at mid-height with the same thickness  $\delta_e$ . Though the internal interface is not a rigid no-slip wall ( $v_{\theta}$  is far from zero) there is a very good agreement between this analytical profile and the numerical result. This suggests the presence of an interfacial Ekman layer of a thickness that is very close to the usual bottom and upper Ekman layer. This shows that there is a classical Ekman layer for a density interface thickness that is small compared to  $\delta_e$ .

The key result of the present research is that for small Ro number, the interfacial structure differs from the classical Ekman layer, and an additional zone develops at the interface (see Figure 6.5 b) ), resulting in additional interfacial layers.

The calculations above are conducted for high Sc values (700). It is noteworthy that the interfacial layers are much less pronounced as soon as the Schmidt number is decreases (figure 6.6). Since the shear layers are much larger, it will be harder to recognize the Ekman layer.

## 6.4. Conclusions

We have studied the dynamics of interfacial Ekman layers for different Sc- and Ro- number. For high Schmidt number, we have found interfacial Ekman-layers



**Fig 6.6.:** *Simulation similar to numB but with  $Sc=20$ . For legend see figure 6.5.*

in addition to the usual Ekman and Stewartson layers near the solid boundaries. When the Ekman layers are large compared to the density interface the comparison with classical Ekman layers suggests that these interfacial Ekman layers have properties similar to rigid no-slip wall boundary layers (as mentioned by [Brady et Lopez \(2011\)](#)). Their thickness is of the same order of magnitude as that of Ekman layers near solid boundaries. In the case of high Schmidt number and small Rossby number, an additional interfacial structure is observed next to weak interfacial Ekman layers. Most likely these layers are due to diffusive effects and are not observed for moderate Rossby numbers  $\approx 0.5$ . In this latter case there is a relatively strong motion in the lower layer due to stretching of background vorticity, and the corresponding Ekman circulation impedes diffusive effects to develop.



## 7. Frontal instabilities and waves in a differentially rotating fluid

Les résultats sur les instabilités frontales pour un écoulement bicouche dans une cuve annulaire font l’objet d’une publication ‘fast-track’ dans le *Journal of Fluid Mechanics*. Ainsi nous les incluons en anglais \*

We present an experimental investigation on the stability of a baroclinic front in a rotating two-layer salt-stratified fluid. A front is generated by the spin-up of a differentially rotating lid at the fluid surface. In the parameter space set by rotational Froude number,  $F$ , dissipation number,  $d$ , (i.e. the ratio between disk rotation time and Ekman spin-down time), and flow Rossby number, a new instability is observed that occurs for Burger numbers larger than the critical Burger number for baroclinic instability. This instability has a much smaller wave length than the baroclinic instability, and saturates at a relatively small amplitude. The experimental results for the instability regime and the phase speed show overall a reasonable agreement with the numerical results of [Gula et al. \(2009b\)](#) suggesting that this instability is the Rossby-Kelvin instability that is due to the resonance between Rossby and Kelvin waves. Comparison with the results of [Williams et al. \(2005\)](#) and [Hart \(1972\)](#) for immiscible fluid layers in a small experimental configuration shows continuity in stability regimes in  $(F,d)$ -space, but the baroclinic instability occurs at a higher Burger number than predicted according to linear theory.

Small-scale perturbations are observed in almost all regimes, either locally or globally. Their non-zero phase-speed with respect to the mean flow, cusped-shaped appearance in the density field and the high values of the Richardson number for the observed wavelengths suggest that these perturbations are in many cases due to Hölmboë instability.

### 7.1. Introduction

Fronts occur in the atmosphere and oceans and are marked by a sharp transition in density and shear. In separating energy, mass and momentum, their dynamics are relevant for large-scale circulation and climate models. Since the work of [Charney \(1947\)](#) and [Eady \(1949\)](#) on baroclinic instability, the dynamics

---

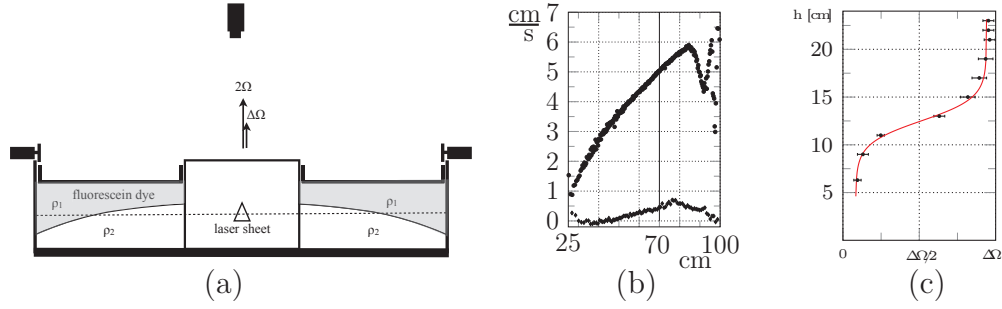
\*. Des informations et figures supplémentaires sur les ondes de Hölmboë et sur des caractéristiques non-linéaires ont été ajoutées.

of frontal instability has attracted a large number of researchers (see e.g. review by Hart (1979), and textbook of e.g. Pedlosky (2001)). Most of these studies concern instability in quasi-geostrophic flows. In the present study we focus on ageostrophic effects.

In exploring ageostrophic instability, Sakai (1989) investigated new resonant combinations between gravity waves and Rossby waves for a front in a two-layer fluid. For waves moving in the upper- and lower -layer in opposite directions, resonance can be expected when the Doppler-shifted frequencies of the waves match. For instance, baroclinic instability can then be explained as a resonance between the Rossby waves in each layer. With this approach Sakai (1989) found the instability for the resonance between Rossby and Kelvin waves, further called the Rossby-Kelvin instability (below briefly RK). In continuing this work, Gula *et al.* 2009ab consider different geometries (i.e. for a channel Gula *et al.* (2009a), and annular flow Gula *et al.* (2009b)), include new regions of instability and also consider numerically the effect of continuous stratification.

In the laboratory, frontal instability has been investigated in particular in differentially rotating fluids or fluids that are differentially heated to create a lateral density gradient. By the geostrophic balance, either of these forcing mechanisms lead to the formation of a front in density and shear, as shown in differential spin-up experiments and the heated annulus experiments (see the review by Hart (1979)). Baroclinic instability of fronts has also been considered in the context of spin-up of stratified fluids (e.g. Spence *et al.* (1992) and Flór *et al.* (2004)). We focus on a baroclinic front generated in a differentially rotating fluid as studied by Hart (1972), Lovegrove *et al.* (2000), Williams *et al.* (2005) (further referred to as WHR), but in a differentially rotating annulus which is 8 times larger than that in WHR, and filled with a miscible two-layer stratified fluid, thus allowing for mixing and diffusion between the layers, and no viscous dissipative effects as may occur between immiscible fluids of different viscosity (see Flór (2007)).

Our attention is focused on the experimental observation of the RK-instability, recently investigated numerically by Gula *et al.* (2009a,b). They show that this instability converts 2/3 of its kinetic energy into potential energy and 1/3 into small-scale instabilities. By contrast the baroclinic instability converts approximately 25 times more potential energy into kinetic energy. The RK-instability has growth rates that are comparable to, or larger than that of the baroclinic instability, especially at sharp interfaces. With increasing interface thickness, modes are found to be trapped at the interface and weaker growth rates are found. In contrast to baroclinic instability, the RK-instability saturates at an early stage. Small-scale instabilities appear in the largest frontal excursions of the RK waves and are of Kelvin-Helmholtz (KH) type. The numerical simulations of Gula *et al.* (2009a) show that for Reynolds numbers less than 2000, the diffusion of the front precedes the development of the RK instability. Small-scale motions significantly moderate the mean flow, making the coupling between Rossby and Kelvin waves less likely to occur in small-scale flows for low



**Fig 7.1.:** Sketch of the experimental setup (a), and (b,c) typical measurements of the azimuthal velocity with (b) its radial profile in the upper and lower layer, represented respectively by the upper and lower profile, and (c) its vertical profile (maximum value). The vertical line in (b) indicates the approximate position of the frontal visualization and observation of the instabilities.

Exp.	H (cm)	$g'$ ( $cms^{-2}$ )	$\Omega$ (rad/s)	$\Delta\Omega$ (rad/s)
A	13.5	5.80	0.03 $\rightarrow$ 0.498	0.104
B	13.5	5.49	0.025 $\rightarrow$ 0.498	0.056
C	13.5	6.67	0.03 $\rightarrow$ 0.5	0.073
D	13.5	6.68	0.04 $\rightarrow$ 0.5	0.125
E	11.0	5.59	0.04 $\rightarrow$ 0.5	0.125
F	13.5	6.18	0.05 $\rightarrow$ 0.278	0.146
G	13.4	6.0	0.108	0.105
H	13.6	4.0	0.049	0.10
I	13.2	6.0	0.098	0.082-0.125-0.165
J	13.5	4.7	0.118	0.125-0.094-0.073

**Table 7.1.:** Experimental parameters with in experiments A-F,  $\Omega$  increasing with time, and  $\Omega$  constant in experiments G-J. In experiments I and J,  $\Delta\Omega$  was increased with the indicated steps.

Reynolds numbers.

The paper is organized as follows. In the next section, the experimental setup is presented. The observations of the different instability regimes in the (F,d) parameter space are discussed in section 7.3, followed in section 7.4 by a comparison of the RK-instability of Sakai (1989) with the results found by Gula *et al.* (2009b). In section 7.5 we consider wave observations in the context of Hölmböe instability, Kelvin-Helmholtz instability, and spontaneously-emitted inertia-gravity waves recently observed in experiments of WHR, followed by the conclusions and discussion in section 7.7.

## 7.2. Experimental setup and flow parameters

The experiments are conducted in an annulus of  $R_1 = 100\text{cm}$  outer- and  $R_2 = 25\text{cm}$  inner- radius tank of  $40\text{cm}$  working depth (see figure 7.1a), filled with a stable two-layer salt-stratified fluid, with equal depth layers of  $H=13.5\text{cm}$ . The fluid surface was covered with a rigid Perspex lid, which, in order to apply a vertical shear, was brought into rotation by three wheels, driven by stepper motors. The wheels were placed at equal distances at the rim of the lid (see figure 7.1a) and care was taken to minimize the disk perturbation, which was less than  $5\text{mm}$  in vertical amplitude during rotation. The tank was filled while rotating at a low rotation rate,  $\Omega$ , of typically  $0.05\text{ rad/s}$ . At  $t=0\text{s}$ , the rotation rate was slowly increased with an acceleration of  $2.5 \cdot 10^{-5}\text{ rad/s}^2$ , while the annular disk at the surface was started to rotate cyclonically with a constant rotation,  $\Delta\Omega$ , chosen in the range between  $0.1$  and  $0.4\text{ rad/s}$  (see Table I). For a final rotation speed of  $0.5\text{rad/s}$ , the experiment could take 2 to 3 hours. In the course of an experiment, the two-layer stratification remained intact and apart from the final irregular flow stage, relatively little mixing occurred between the two layers.

To visualize the flow, fluorescent dye was dissolved in the top layer, and illuminated by a horizontal laser sheet that intersected the inclined front at mid depth. In some experiments a vertical light-sheet visualized a radial section and allowed to visualize the mixing between the two layers, and the thickening as well as the slope of the interface. The flow evolution was recorded with a frequency of  $1\text{Hz}$  with two 12bit Dalsa cameras with a top view camera mounted with a fish eye lens, for which the deformation was corrected in the data processing. For each experiment, the values of  $F$  and  $d$ , were plotted in a single graph (see figure 7.3) and the different regimes were determined qualitatively by scrutinizing the evolution of the front from the recordings. In order to double-check the observed modes, experiments for a fixed background rotation (G,H) and for several consecutively increased disk rotations (I,J) are conducted (see Table I).

The experiments are controlled by four non-dimensional parameters : the Rossby number defined below, the rotational Froude number,  $F = (4\Omega^2 L^2)/(g'H)$  (or Burger number  $Bu = 1/F$ ), where the reduced gravity  $g' = 2g(\rho_2 - \rho_1)/(\rho_2 + \rho_1)$  and  $L = (R_2 - R_1)$ , and the dissipation number,  $d = \sqrt{(\nu\Omega)/(H\Delta\Omega)}$ , determined by the ratio of the typical forcing time scale  $1/\Delta\Omega$  and the Ekman spin-up time  $\tau_{su} = H/\sqrt{\nu\Omega}$ . The fourth number is the aspect ratio,  $H/L$ , which was kept constant at  $0.18$ . The reduced gravity,  $g'$ , was kept almost constant and close to the one used in WHR ( $g' = 0.06\text{m/s}^2$ , see Table I).

For stable flows obtained for relatively slow disk speeds, horizontal velocity fields were measured at different heights in the two layers by means of PIV. Typical profiles of the azimuthal velocity along the radius and height are, respectively, shown in figures 1b and 1c. In the region of interest, the azimuthal velocity increases linearly with radius. For a disk speed  $\Delta\Omega$ , the velocity ratio

between the upper and lower layer was found to be  $\approx 0.9\Delta\Omega$  and  $\approx 0.1\Delta\Omega$ , compared to the 0.25 to 0.75 calculated from potential-vorticity conservation (Hart 1972) for two immiscible fluid layers. These different values are due to the larger interface thickness. Consistently with Gula *et al.* (2009b) and WHR the Rossby number is defined as  $Ro = \Delta\Omega/(2\Omega)$ . With increasing background rotation, the Rossby number varied between  $O(1)$  at the beginning, and  $O(0.1)$  at the end of an experiment. Since the Rossby number was in the range  $0.06 < Ro < 1.5$ , and the aspect ratio small, generally  $(Ro H/L)^2 \ll 1$  so that the hydrostatic approximation applies (see e.g. Hart 1979). Since  $H/L = 0.18$  and the flow is forced in the horizontal direction, the shallow water approximation is valid to leading order. Ageostrophic effects are therefore mainly present when the Rossby number is not small.

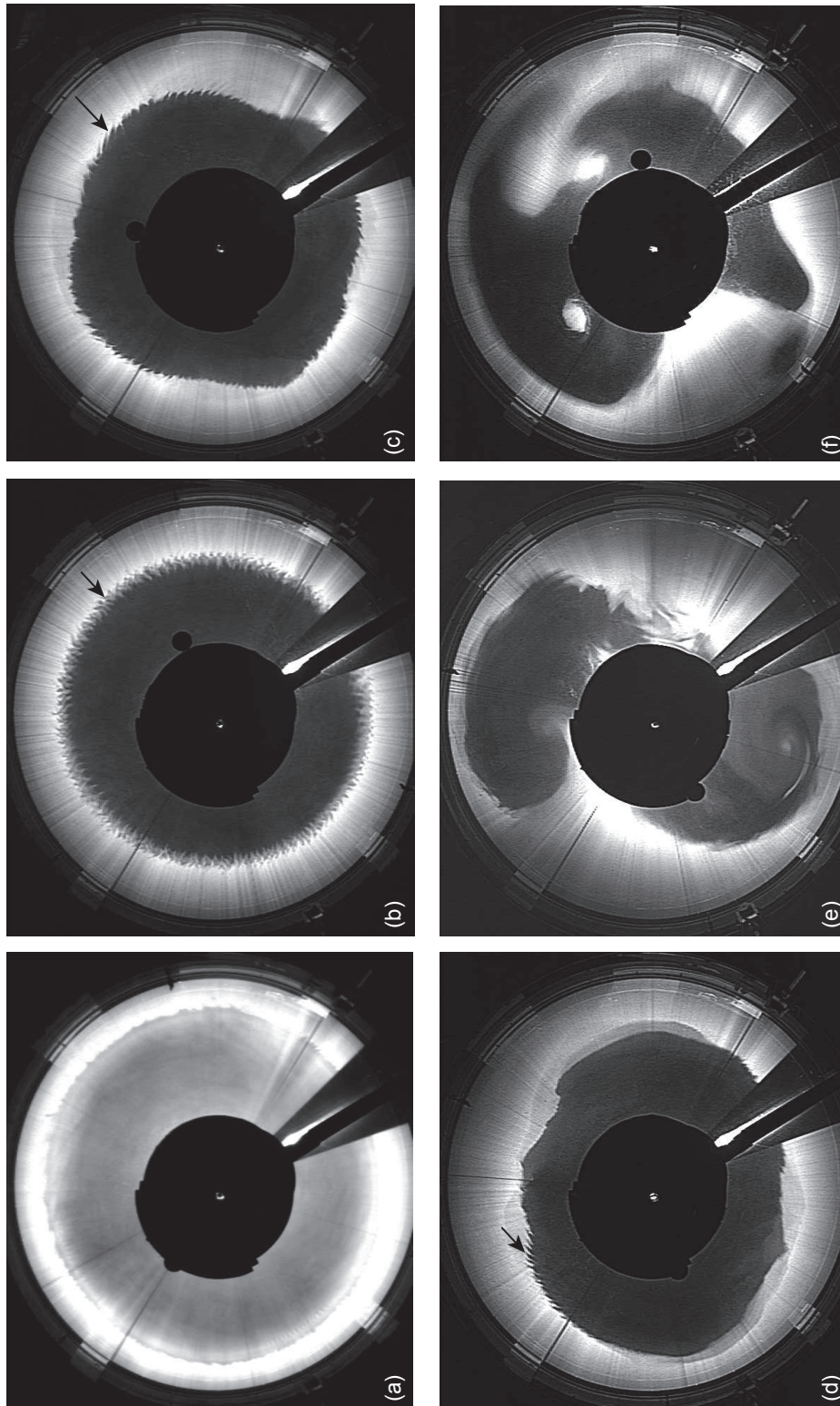
### 7.3. Frontal instabilities

With the accelerating background rotation, and corresponding increase in Froude and dissipation number, the following sequence of instability regimes is observed (see figure 7.2) : axisymmetric flow (AX), Rossby-Kelvin instability (RK), baroclinic instability (BI) and eventually a flow with irregular baroclinic waves (IW). For small background rotation, an axisymmetric front is observed (see figure 7.2a). Small-scale waves appeared either on the entire front (figure 7.2b) or locally due to variations in the shear and interface thickness (see figure 7.2c,d). With increasing background rotation, large-scale wave modes developed whereas the small-scale perturbations decreased in activity (figure 7.2a-f). The large-scale modes saturated at a low amplitude resulting in a relatively modest deformation of the front (figures 7.2a-c and 4a-f). This instability, which we will refer to below as the RK-instability (see figure 4a-f), continued to exist during the early stages of baroclinic instability. When increasing the Froude number to values between 3 and 5, baroclinic modes 1 and 2 appeared to be dominant and continued to grow until the rim of the tank was reached (figure 7.2d-f).

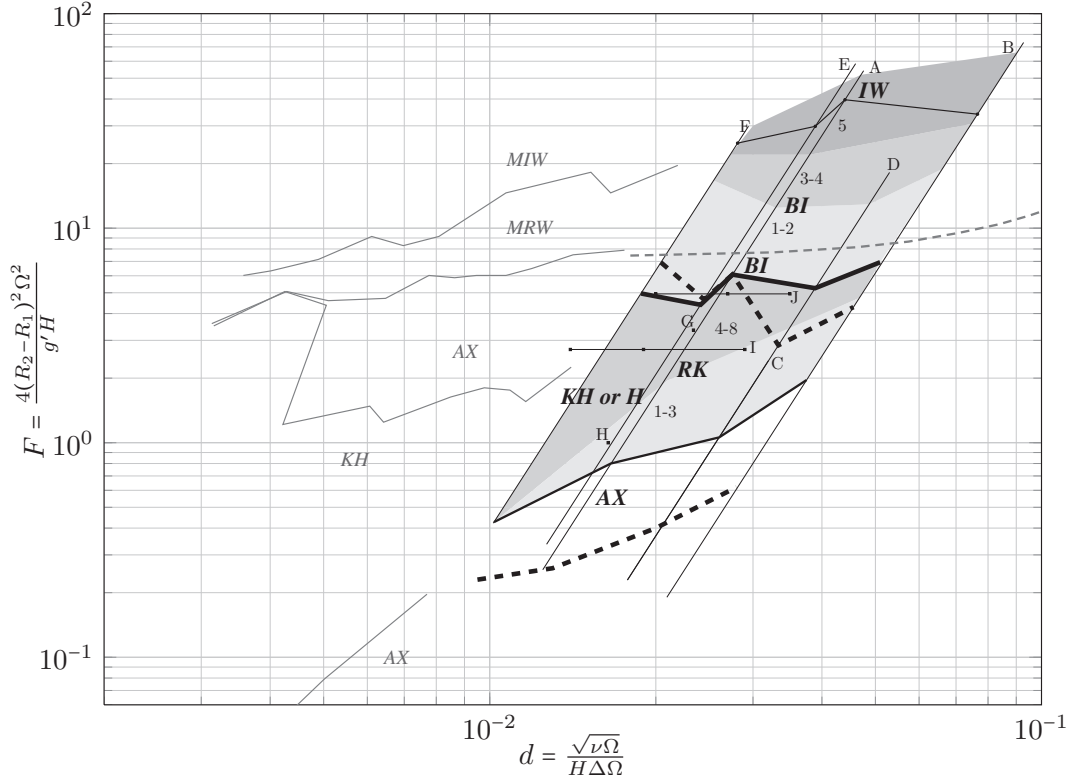
In the logarithmic plot of figure 7.3 the values of the Froude number,  $F$ , and dissipation number,  $d$ , are represented for each experiment (straight black lines). The dotted and drawn lines between individual points separate the instability regimes. The RK-instability appears after the axisymmetric regime with modes 1, 2 or 3 for low Froude numbers whereas for higher Froude numbers the mode increases up to 8. Since multiple modes often coexisted and made a single mode observation difficult, regions of modes are indicated in figure 7.3.

At the left the grey lines show the different regimes observed by WHR for an immiscible fluid interface. The lower dashed black line separates the Kelvin-Helmholtz regime from the stable regime and approximately adjoins the separation line for KH instability found by WHR. The baroclinic unstable regime sets in slightly earlier than the observations of WHR, and the prediction according to the quasi-geostrophic theory for a two-layer theory of Hart (1972) (grey





**Fig 7.2.:** Series of top view images showing the typical flow evolution, here for experiment A, with a)  $Ro=0.95$ ,  $Bu=1.2$ ,  $d=0.017$  b)  $Ro=0.72$ ,  $Bu=0.70$ ,  $d=0.019$  c)  $Ro=0.46$ ,  $Bu=0.28$ ,  $d=0.024$  d)  $Ro=0.34$ ,  $Bu=0.16$ ,  $d=0.028$  e)  $Ro=0.32$ ,  $Bu=0.14$ ,  $d=0.029$  f)  $Ro=0.14$ ,  $Bu=0.028$ ,  $d=0.043$ . Arrows point at examples of short-scale waves (section 7.5).

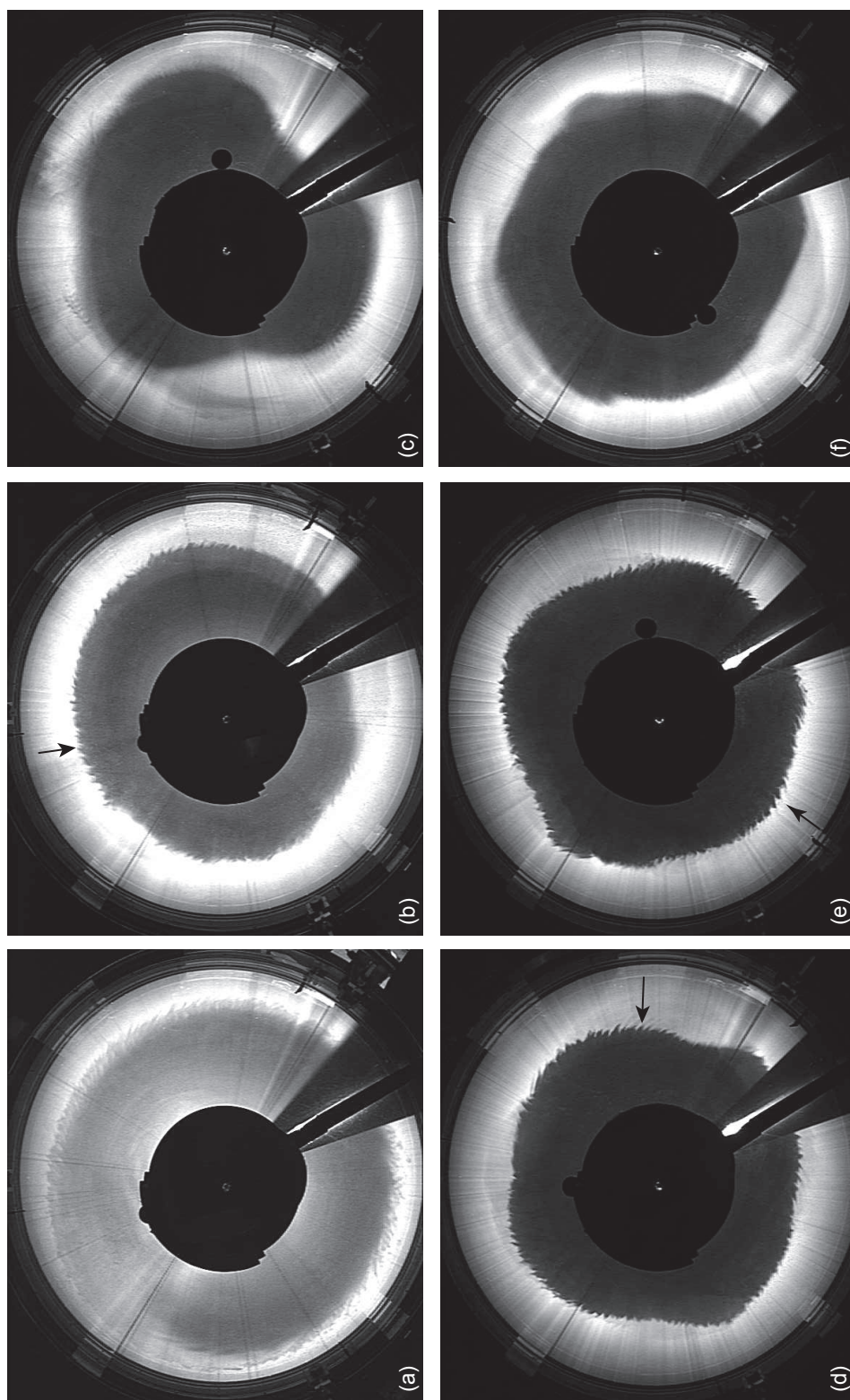


**Fig 7.3.:** Regime diagram F-d. The inclined straight black lines correspond to experimental runs A-F, i.e. increasing background rotation, and single points constant background rotation (runs G-J) (see Table I). In the area delimited by thick dashed-lines KH or Hölmboe (KH or H) instability occur; the large-scale instability regimes (AX, RK, BI and IW) are delimited with lines, with BI starting above the bold black line. The grey zones indicate the different observed modes. Grey lines left represent adjoining results of Williams et al 2005, with regimes : (AX) Axisymmetric flow, (KH) Kelvin-Helmholtz instability, (MWR) Mixed Regular Waves and (MIW) Mixed Irregular Waves. The grey dashed curve (right) represents the quasi-geostrophic neutral curve for baroclinic instability of Hart (1972).

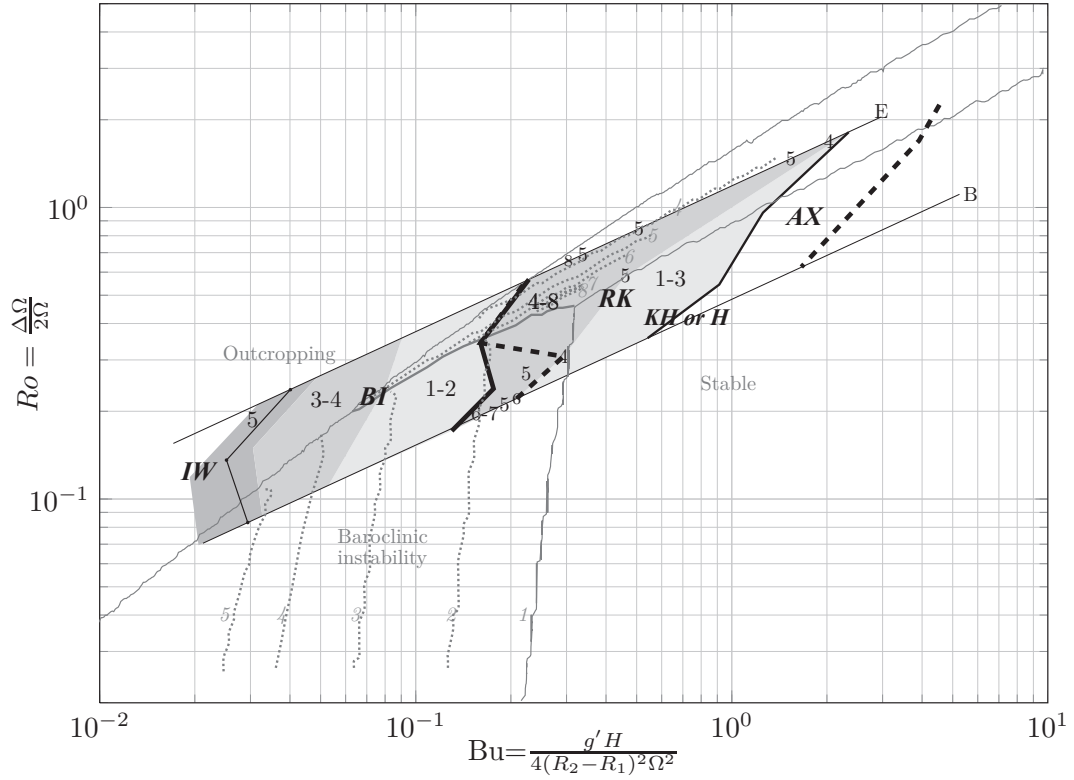
dashed line). The irregular regime (IW) in the present experiments corresponds to the regime called Mixed Irregular Waves (MIW) in WHR. In this regime, the front changes rapidly, but probably due to the diffused interface no small-scale interfacial perturbations were observed.

## 7.4. Rossby-Kelvin instability

Figure 7.5 shows the diagram of figure 7.3 in (Bu,Ro)-space showing a comparison of the experimentally found modes with the numerical results obtained with the collocation code of Gula et al. (2009b) with instead of a rigid body ro-

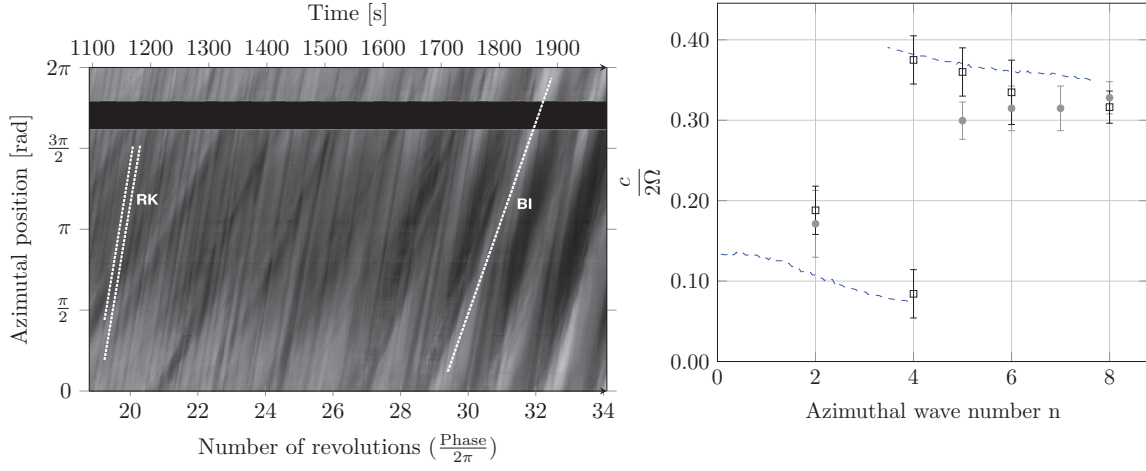


**Fig 7.4.:** Observed modes of the RK instability with modes (a) 1,  $Ro=1.67$ ,  $Bu=1.99$ ,  $d=0.014$ ; (b) 1 and 2,  $Ro=0.94$ ,  $Bu=0.63$ ,  $d=0.019$  (c) 1 and 3,  $Ro=0.34$ ,  $Bu=0.50$ ,  $d=0.038$  (d) 4,  $Ro=0.46$ ,  $Bu=0.28$ ,  $d=0.024$  (e) 5,  $Ro=0.49$ ,  $Bu=0.32$ ,  $d=0.023$ , and (f) 6,  $Ro=0.22$ ,  $Bu=0.21$ ,  $d=0.047$ . The modes were observed in different experiments. Arrows point at examples of short-scale waves (section 7.5).



**Fig 7.5.:** Comparison in  $Ro$ - $Bu$ -space between experimental results and numerical calculations (see text). Experimental results are represented as in figure 7.3 (with the experimental measurement region delimited with the lines of experiments *E* and *B*), the regimes (*AX*, *RK*, *BI*, *IW*) and the *KH* or *H* region, and the observed modes are indicated as in figure 7.3. In addition experimentally observed modes are indicated by the numbers in black. The grey lines represent numerical results, with the lower line delimiting the stable region, and the upper line the limit to outcropping; the dotted lines represent the modes and the thick grey line the separation between baroclinic and *RK* instability.

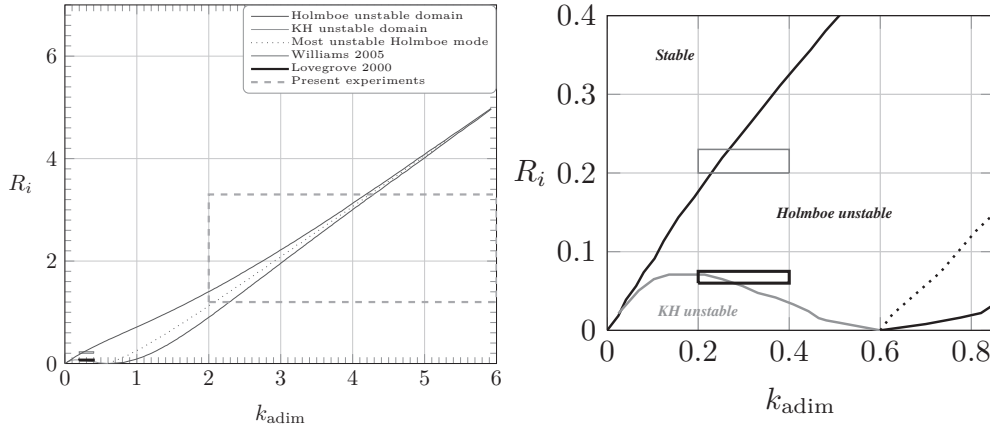




**Fig 7.6.:** Space-time diagram for experiment *G*, with the white lines indicating the motion of the (BI and RK) instability (a), and (b) thus obtained phase speeds for experiments *G* and *I*. The dashed lines represent the numerical values for identical values of  $Ro$  and  $Bu$  as in experiment *G*, and the phase speeds obtained for experiment *G* and *I* represented respectively by filled and open symbols.

tation an azimuthal velocity-field such as shown in figure 7.1b). The lower line in figure 7.3 delimits the stable region, whereas above the upper grey line outcropping may be expected in addition to baroclinic instability. However, outcropping occurred intermittently because of nonlinear flow-features such as amplitude vacillation and, since being out of the scope of the present paper, is not considered here. In the RK-unstable region, the experimental results agree well with the numerical results for wavenumber 5 and 6 (see figure 7.5) and globally show a similar trend with decreasing  $Bu$ -number. In the regime (BI) there is good agreement with the numerical results and also the separation between the BI and the RK regime is marked by a sudden decrease in wave number (see figure 7.5). However, the RK-instability region expands over a much wider range of  $Ro$  numbers. This difference and also the difference in the KH region may be explained by the high degree of idealization of the numerical model, i.e. a sharp density and shear interface instead of a continuous density and shear interface.

For each experiment, a space-time (or Hovmöller) diagram of the position of the front was established from the variation of the front position at each instant,  $r_{front}(\theta, t)$  (with  $\theta$  the azimuthal position in the tank, and time  $t$ , see figure 7.6a). The grey value represents the wave displacement. The inclined grey areas indicate the motion of a crest (white) or trough (dark) and provide a measurement of the phase speed,  $c$  (see lines in figure 7.6a). The thus obtained non-dimensional phase speed,  $c/2\Omega$ , is presented in figure 7.6b against the observed mode for the experiments *G* and *I*. For identical  $Ro$  and  $Bu$  number as in experiment *G* the phase speed has been calculated numerically. For expe-



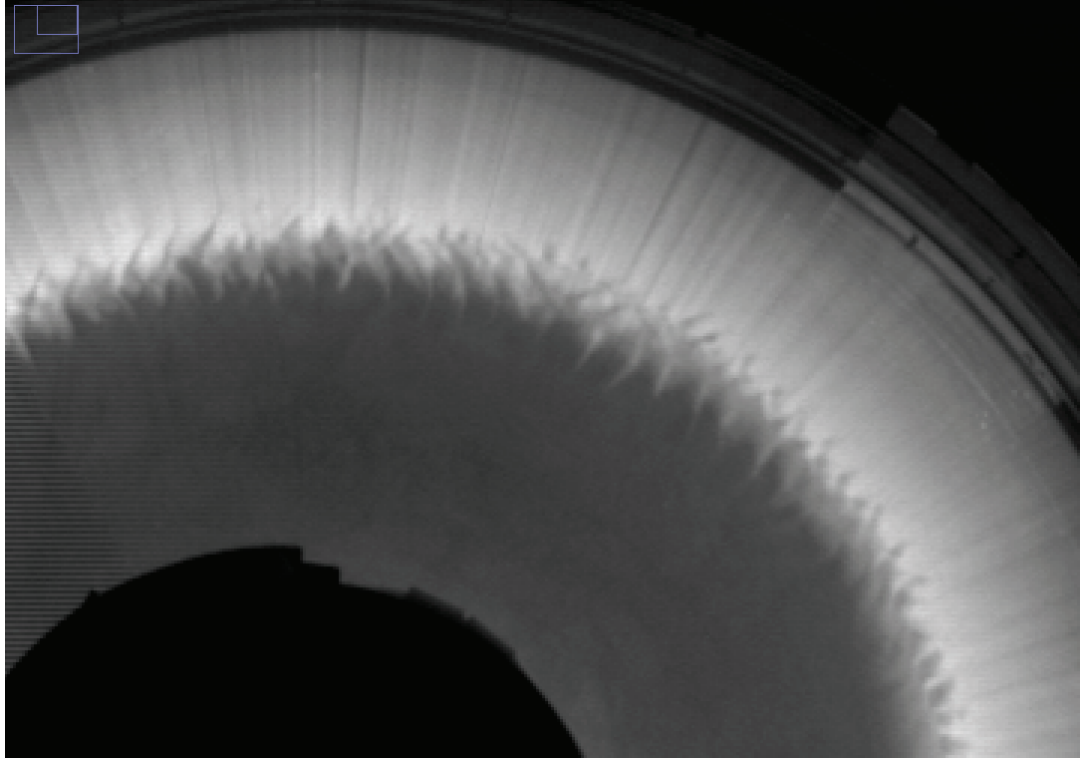
**Fig 7.7.:** Diagram of Kelvin-Helmholtz and Hölmboë stability with the parameter regions considered in the present experiments and the ones reported in the literature (see legend) (a), and (b) a zoom on the region with Kelvin-Helmholtz instability (i.e. the region below the grey line) and the parameter regime considered in [Lovegrove et al. \(2000\)](#), and [Williams et al. \(2005\)](#).

riment I, the initial parameters were close to experiment G (see Table I). Both experimental results show good agreement with the numerical values for the RK modes as well as for the baroclinic modes, and therefore support the observation of the RK-instability.

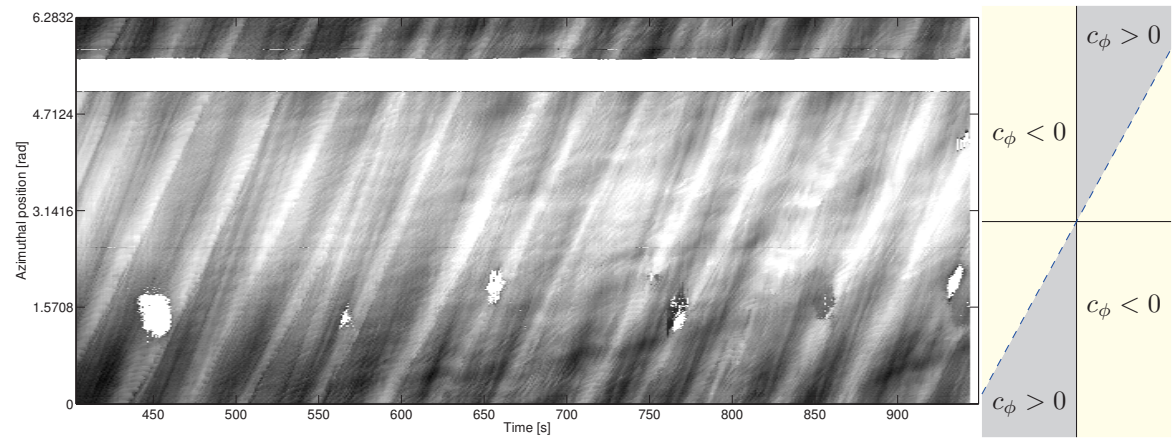
## 7.5. Short scale waves

The small scale waves are observed to have similar wavelengths in all regimes and have the same signature. Figures 7.2b,c and 4b,d,e show small-scale waves on top of the RK modes, and figure 7.2d,e on a baroclinic mode 2 (see arrows). They are typically of a wavelength of the order of the interface thickness, i.e. 3 cm to 6 cm, occur in regions with the largest shear and are cusp-shaped. Their wave crests are observed to remain cusped-shaped during the flow evolution and no Kelvin-Helmholtz billows developed (see figures 7.2 and 4 and figure 7.8 for a zoomed view). From space-time diagrams such as shown in figure 7.6a and figure 7.9 the phase speed is measured and was approximately constant with respect to the rotating frame of reference, i.e. they propagate in the retrograde direction with respect to the mean flow (see figure 7.9) with a (dimensional) phase speed  $-\Delta\Omega/2$ . By contrast, Kelvin-Helmholtz billows are advected with the mean flow, as observed in some experiments, and propagate approximately with speed  $\Delta\Omega/2$  with respect to the rotating frame of reference. These observations strongly suggest that these waves are in many cases due to the Hölmboë instability as observed by [Lawrence et al. \(1991\)](#).

In immiscible two-layer fluids in a smaller setup, short-scale waves have also been observed by [Lovegrove et al. \(2000\)](#) and [Williams et al. \(2005\)](#). These waves



**Fig 7.8.:** Zoomed view on the cusped-shaped wave crests of the Holmboe instability



**Fig 7.9.:** a) Space-time diagram in presence of holmboe waves with retrograde propagation with respect to the mean flow characterized by very close oblique lines for crests and troughs b) location (in yellow) of these oblique lines where phase speed  $c_\phi = c / \text{mean flow}$  is negative with respect to the mean flow (main large crests and troughs symbolised by the dashed blue line)

were interpreted as being spontaneously-emitted inertia-gravity waves associated with unbalanced flows (see [Ford \(1994\)](#) and [McIntyre \(2009\)](#)). Hölmboë instability can grow for any value of the bulk Richardson number provided that the ratio of the thickness of the shear interface to the density interface-thickness is larger than 1. In practice, the Hölmboë instability has a relevant growth rate when this ratio exceeds a value of approximately 3 (see [Carpenter \*et al.\* \(2010\)](#)).

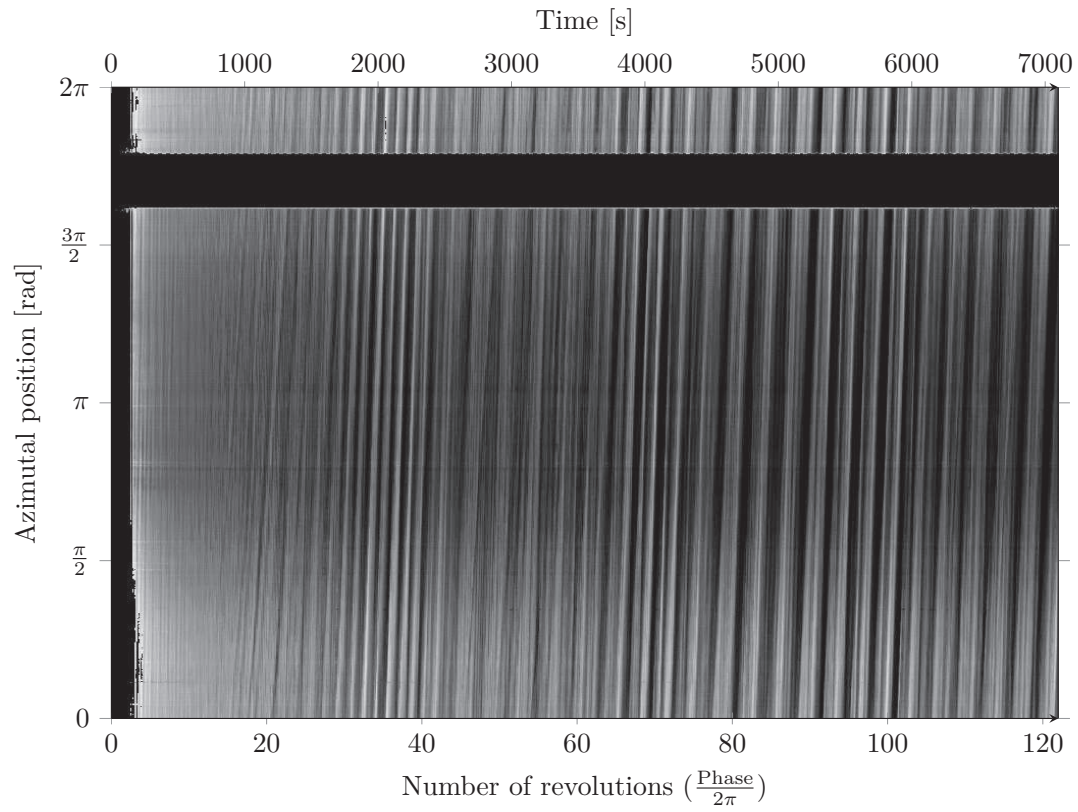
Figure 7.7a) shows the stability diagram obtained with linear stability analysis of the Taylor-Goldstein equation for the case of a step-density profile and a piecewise uniform velocity profile along the vertical (see e.g. [Ortiz \*et al.\* \(2002\)](#)). Here, the definition of the bulk Richardson number is  $R_i = \frac{g'2\delta_s}{\Delta U^2}$  based on the shear-layer thickness  $2\delta_s$  and the dimensionless wavenumber along the abscissa  $k\delta_s$ , and  $\Delta U = 0.8\Delta\Omega R$ . The area covered by the present experimental data is large given the uncertainties in shear layer and density layer thickness and includes the possibility of Hölmboë waves as well as spontaneously emitted inertia-gravity waves.

In the experiments with immiscible fluids of [Lovegrove \*et al.\* \(2000\)](#) and [Williams \*et al.\* \(2005\)](#), the shear thickness  $\delta_s$  can be defined precisely by the Ekman-layer thickness at the interface,  $\delta_e = \sqrt{\frac{\nu}{\Omega}}$ . This thickness is much larger than the molecular thickness of the immiscible fluid interface. With this shear thickness, the Richardson number follows the same definition as [Williams \*et al.\* \(2005\)](#). Accordingly, using figure 4 in [Williams \*et al.\* \(2005\)](#) which displays the evolution of  $R_i$  with the turntable rotation, we estimate the Richardson number and the wave number and superimpose the parameter areas on the stability diagram in figure 7.7b). This shows that the observed small-scale perturbations can be due to Hölmboë instability, and less often due to Kelvin-Helmholtz instability. These results conjecture the above described observations of Hölmboë waves.

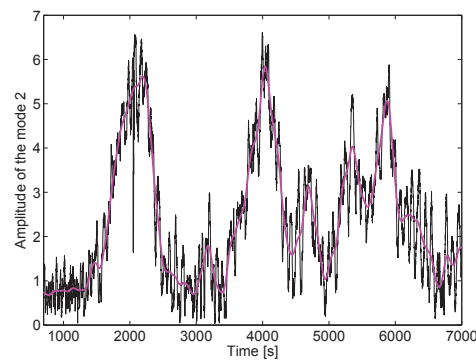
## 7.6. Nonlinear features

In the baroclinic unstable regime, amplitude vacillation was observed and the flow oscillated in time between the axisymmetric stage and the unstable baroclinic stage (see e.g. [Pedlosky \(2001\)](#)). These periodic changes in wave amplitude are related to periodic transfers of energy between the wave field and the zonal flow and has been observed before in two-layer immiscible fluid ([Hart, 1976, 1979](#); [Read \*et al.\*, 1992](#); [Früh \*et al.\*, 1997](#)). This is illustrated figure 7.10 with very contrasted crests and troughs separated with around 35 table rotation periods. It can also be clearly seen on the evolution of the amplitude of the mode 2 with major peaks at the same positions (figure 7.11).





**Fig 7.10.:** Total Hovmöller diagram for experiment *G* with  $d = 0.023$  and  $F = 3.27$  showing the amplitude vacillation of the baroclinic mode 2 between approximately 35, 70 and 100 table rotation periods.



**Fig 7.11.:** Evolution in time of the amplitude of the spatial Fourier mode 2 of  $r_{\text{front}}$  for experiment *G*.

## 7.7. Conclusions and discussion

These results report experimental observations of the RK instability investigated by Sakai (1989) and Gula *et al.* (2009b). For the instability regions BI and RK reasonable agreement with the numerical results of Gula *et al.* (2009b) is obtained whereas good agreement is obtained for the comparison with the phase speeds. The RK instability is found to saturate at a relatively small wave amplitude and occurs for Burger numbers between  $0.15 \leq Bu_c \leq 2$  and moderate Ro number, i.e. approximately  $2 > Ro > 0.2$ . Baroclinic instability occurs for smaller Bu numbers,  $Bu < 0.3$ , i.e. earlier than predicted according to geostrophic theory and former experiments on frontal instability in immiscible fluids (WHR, Hart (1972)). Nonlinear features of amplitude vacillation has been observed in the advanced period of the baroclinic instability.

Similar experiments for identical parameters as experiment F in a tank of 1m diameter without an internal cylinder showed the RK instability conform with the here reported results. Therefore, the only pertinent difference between WHR and present experiments is the immiscible fluid interface. Dissipative effects and the inhibition of the Rossby wave amplitude should be sufficient to suppress the RK-instability and make its effect small. The RK-instability favors intense small-scale instabilities near the outer boundary which are of the Kelvin-Helmholtz type (see Gula *et al.* (2009a), figure 16), as has been observed in the present experiments. At an immiscible fluid interface with different viscosity fluids, these vertical motions could be effectively dissipated and thus inhibit the growth rate of the instability. Indeed, the Reynolds number based on the flow width and velocity was of approximately 1000 or smaller in the experiments of e.g. Griffiths *et Linden* (1981a) and Stegner *et al.* (2004)). In WHR, and also Hart (1972) the Reynolds number is much larger than 2000 but the interfacial tension could faster dissipate the small-scale instabilities that occur during the transfer of kinetic energy to potential energy and damp the instability.

Frontal small-scale perturbations could in many cases be of Hölmböe type. Their appearance, wavelength and Richardson number in the present experiments and those of WHR support this hypothesis. To our knowledge, Hölmböe instability has not, or rarely been observed in the context of frontal dynamics. For a density interface being shrouded by a relatively thick shear interface, Hölmböe instability may appear for all Richardson numbers. One may therefore expect them to play an important role in frontal dynamics in many geophysical flows. For sufficiently high Reynolds numbers, the local shear may decrease the density interface thickness, but not necessarily the thickness of the shear interface, and thus favor Hölmböe instability. In the light of the radiation of energy away from regions of high shear, the relevance of spontaneous emission of inertia-gravity waves remains to be further investigated, but waves generated by the Hölmböe instability could be a potential candidate that deserves more attention.

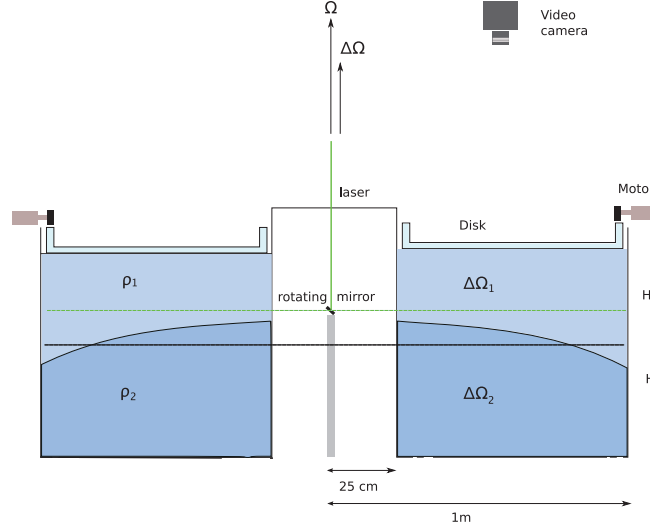
The authors acknowledge Adrien Capitaine for doing an initial set of experiments, Samuel Viboux and Henri Didelle for improving the rotating platform that served for these experiments, and support by ANR contract ‘FLOWING’.

## 8. Phénomènes agéostrophiques : étude numérique

Complementary to the experimental observation of the Rossby Kelvin instability described in Chapter 7, in this chapter the stability of a baroclinic front in a two-layer rotating fluid is studied numerically. The experimental Rossby-Burger diagram allowed us to pinpoint a specific numerical simulation in which the Rossby-Kelvin instability is reproduced. By comparing the numerical vector field of the DNS and the structure given by linear stability results (Gula *et al.*, 2009b), we confirm that the instability is the interaction between a Kelvin wave in the lower layer and a Rossby wave in the upper layer. Second, small-scale perturbations were found in the numerical simulation. We investigate them in terms of shear stratified flows using the Miles criterion and results on Hölmboë instability by Alexakis (2005) for smooth shear and density profiles. The perturbations occurring in the initial times of an axisymmetric simulation with Schmidt number 700 are compatible with Hölmboë and also Kelvin-Helmholtz instability, but the present small waves superimposed on the Rossby-Kelvin mode are likely not to be Hölmboë or Kelvin-Helmholtz instability but inertia-gravity waves. The origin of these waves remains delicate, because of the multitude of various perturbations present in the flow and is discussed within the scope of the obtained numerical results.

### 8.1. Introduction

Ageostrophic effects on fronts have drawn attention because of the major role of gravity waves for the transport of energy and momentum, turbulence and mixing in the middle atmosphere (Fritts et Alexander, 2003) and the observations of fronts and jets as sources of gravity waves (Fritts et Nastrom, 1992). Experiments on a two-layer rotating fluid with vertical shear (Flór, Scolan et Gula, 2011) have shown ageostrophic instabilities (such as due the coupling of equilibrated and divergent motions) and in particular the resonance between a Rossby wave and a Kelvin wave has been suggested as a responsible mechanism. The high temporal and spatial three dimensional resolution of the present direct numerical simulation allows us to investigate further the conjecture of Rossby-Kelvin instability, and also to investigate the small-scale perturbations and to compared the results with the shear instability theory of Alexakis (2005).



**Fig 8.1.:** *Sketch of the experimental setup. An annulus is filled with a two-layer fluid and rotating at the rotating speed  $\Omega$  driven by a rotating disk at the surface with speed  $\Delta\Omega$  in rotating frame of reference. The initial density difference is  $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$  with  $\rho_1$  and  $\rho_2$  the density of the upper and lower layer. Black line : parabolic interface. Green line : laser beam.*

## 8.2. Governing equations and numerical methods

The numerical simulations were performed using DNS code by [Verzicco et al. \(1997\)](#). The governing equations are Boussinesq Navier-Stokes equations including Coriolis and centrifugal force in the annular configuration illustrated figure 8.1 (see details in sections 2 and 6). The boundary condition at the top involves the disk rotating at  $\Delta\Omega$  in the background frame rotating at  $\Omega$ . The equation of salinity allows the diffusion of salinity.

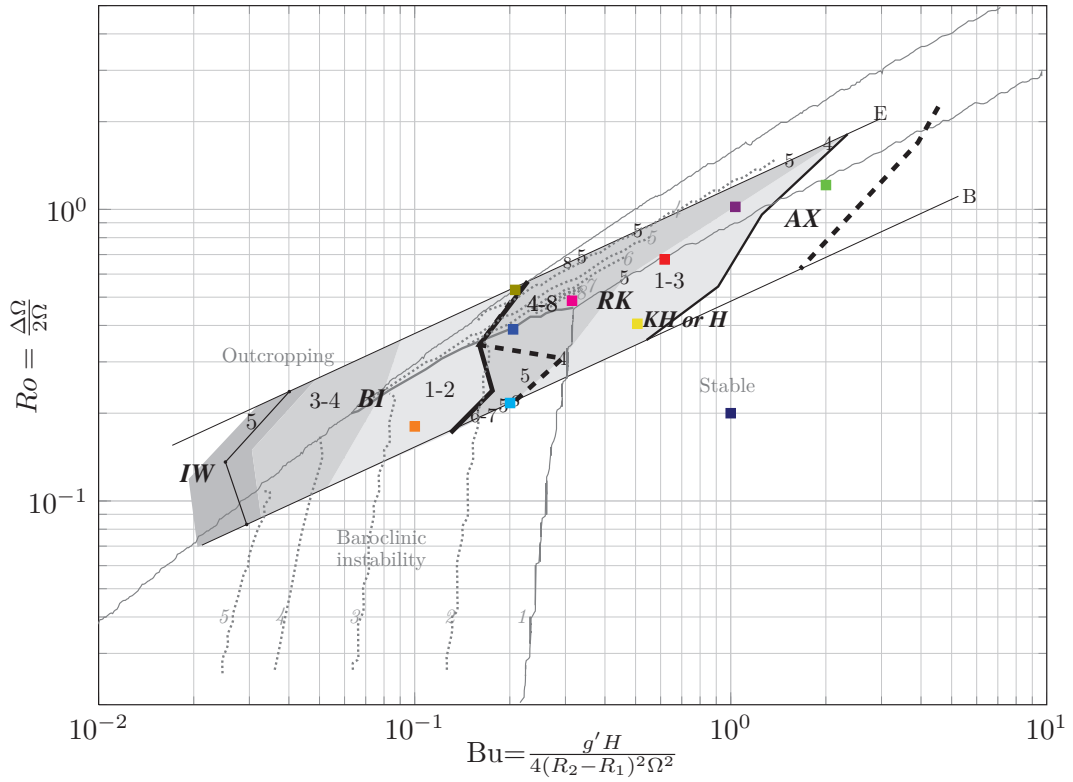
The dimensionless parameters controlling the system are the following : the Rossby number  $R_o = \frac{\Delta\Omega}{2\Omega}$ , the Burger number  $B_u = \frac{g'H}{4\Omega^2 L^2}$ , the Reynolds number based on disk velocity,  $Re = \frac{\Delta\Omega L^2}{\nu}$ . The Reynolds number is linked to the Ekman number number  $\frac{1}{Re} = \frac{E_k}{R_o} \left(\frac{H}{L}\right)^2$  with  $E_k$  the vertical Ekman number  $E_k = \frac{\nu}{2\Omega H^2}$ . The acceleration ratio is given by  $\Gamma = \frac{g'}{g} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}$ , the aspect ratio by  $\gamma = H/L$  with  $H = H_{\text{reduced}} = \frac{2H_1 H_2}{H_1 + H_2}$  and  $L = R_2 - R_1$ . Finally  $Pe = \frac{\Delta\Omega L^2}{\kappa}$  is the Peclet number and verifies  $Pe = Re \cdot Sc$  where  $Sc$  is the Schmidt number  $Sc = \frac{\nu}{\kappa}$ .

Equations are written in cylindrical coordinates  $(v_r, v_\theta, v_z)$  and discretized on a staggered mesh by central second-order accurate finite difference approximation. Details in the numerical scheme can be found in [Scolan et al. \(2011\)](#) in [Verzicco et Orlandi \(1996\)](#) and [Verzicco et Camussi \(1997\)](#) where further details of the numerical procedure can be found.

In order to explore the experimental diagram with similar parameters (see table 8.1 and figure 8.2), simulations with small grid resolution have been done.

Case	Sym- bol	Grid resolution ( $N_\theta \times N_r \times N_z$ )	$g'$ ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )	$\Omega$ (rad/s)	$\Delta\Omega$ (rad/s)	Ro	Bu	Re	Sc
numA	■	$97 \times 97 \times 97$	0.0598	0.1341	0.1040	0.3878	0.2049	1500	20
numA2	■	$97 \times 97 \times 97$	0.0598	0.0429	0.1040	1.2121	2.0015	1500	20
numAmil	■	$1201 \times 301 \times 257$	0.0598	0.0772	0.1040	0.6736	0.6181	10000	100
numG	■	$257 \times 97 \times 257$	0.0600	0.108	0.1050	0.4861	0.3147	1500	20
numB	■	$97 \times 97 \times 97$	0.0549	0.1299	0.0563	0.2168	0.2003	1500	20
numD	■	$97 \times 97 \times 97$	0.0668	0.2028	0.0730	0.1801	0.1001	1500	20
numH	■	$97 \times 97 \times 97$	0.0400	0.049	0.1000	1.0204	1.0344	1500	20
numJ	■	$97 \times 97 \times 97$	0.0470	0.118	0.125	0.5297	0.2080	1500	20
numD2	■	$601 \times 97 \times 95$	0.0668	0.0901	0.0730	0.4052	0.5068	3500	100
numS	■	$601 \times 97 \times 95$	0.0470	0.118	0.125	0.2000	1	3500	100

**Table 8.1.:** Numerical parameters with fixed  $\gamma = H/L = 0.1811$ .

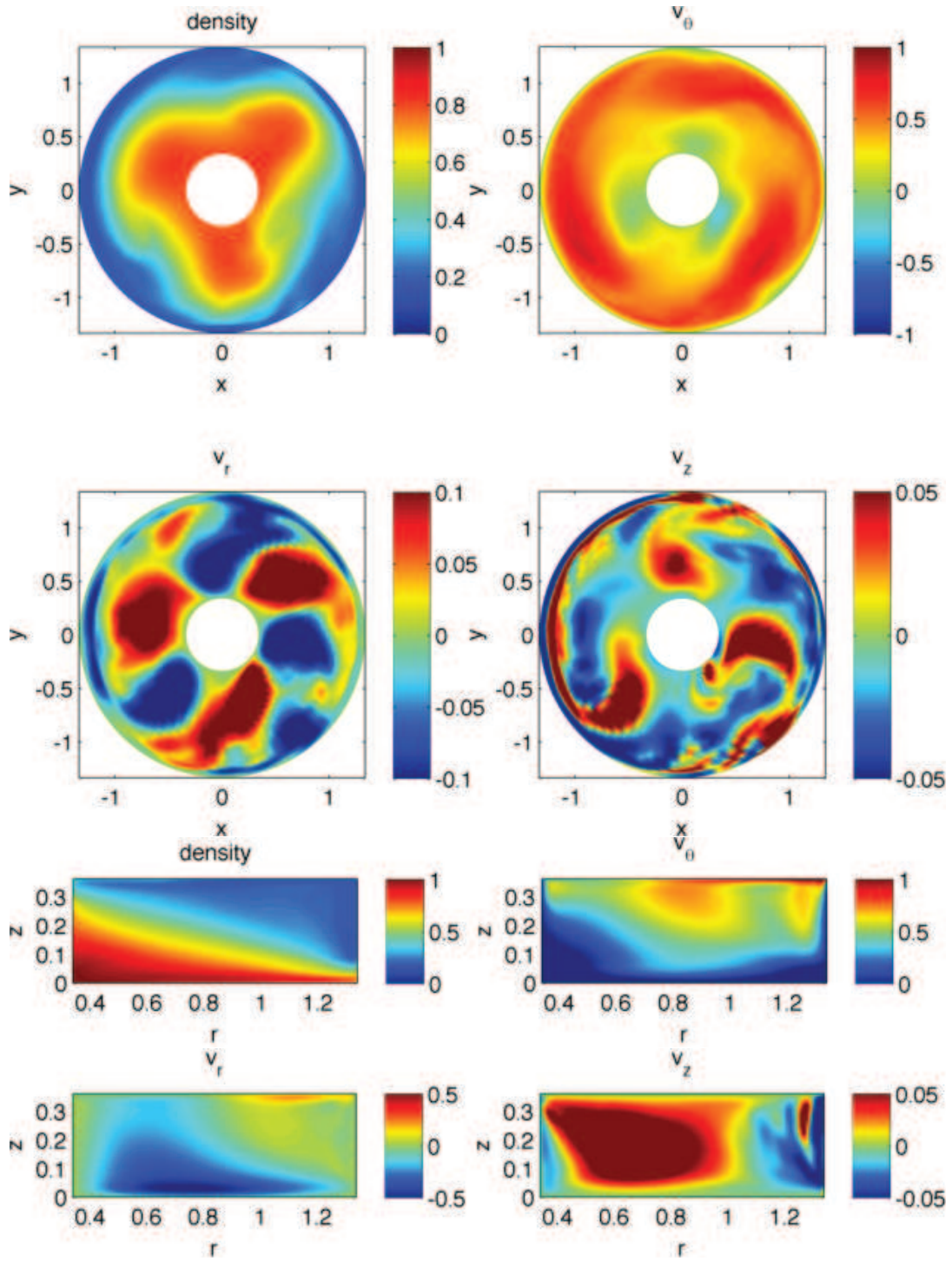


**Fig 8.2.:** Experimental diagram showing zones of different instabilities (RK : Rossby-Kelvin. KH :Kelvin-Helmholtz instability. H : Hölmboe instability. BI : Baroclinic instability. IW : Irregular waves) and choice of the parameters of the numerical simulations with  $Sc = 20$  or  $100$  and reduced grid size. Simulation in red square correspond to simulation with high grid resolution.

Subsequently, a more specific simulation (named numAmil see table 8.1) has been carried out for parameters in the area where both Rossby-Kelvin instability and Hölmboë instability are expected (region RK in figure 8.2). For this simulation, the grid resolution :  $N_\theta \times N_r \times N_z = 1201 \times 301 \times 257$  is chosen so that small-scale perturbations can be resolved. The Reynolds number and the Schmidt number in these simulations are respectively, 10000 and 100, compared to, respectively, 60000 and 700 in laboratory experiments.

In order to capture the small scales and avoid rapid dissipation due to viscous effects, the Reynolds number should be large. At the same time, a high Schmidt value is required to reproduce the small scale density effects of the front. A too low Schmidt number will cause a too rapid diffusion of the density interface, i.e. before the front becomes unstable and rather damp the small scale motions.





**Fig 8.3.:** Density, azimuthal, radial and vertical velocity in the mid-plane for  $\text{num}D$  at  $t=171$  : dominant mode 3 of baroclinic instability.



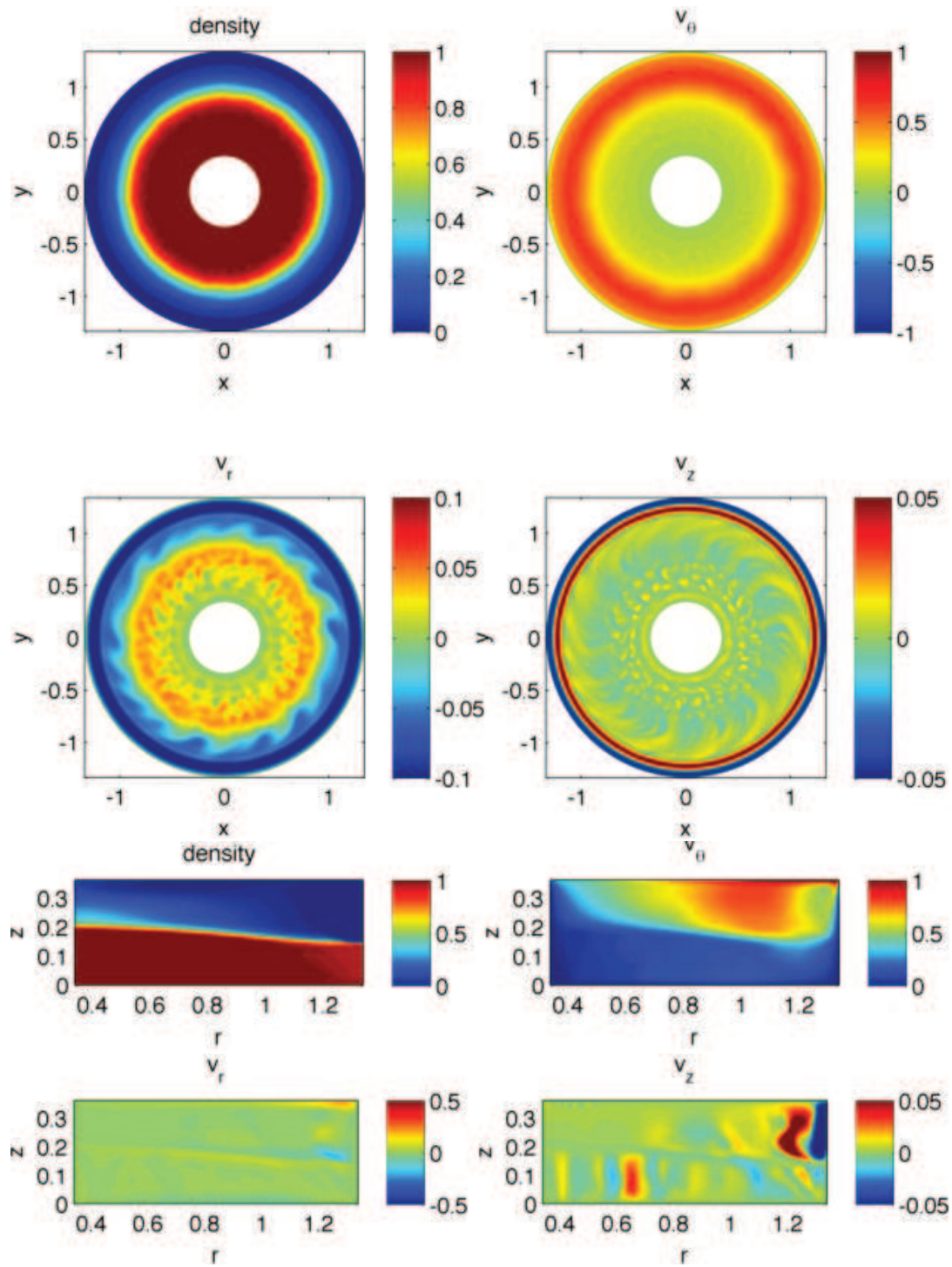
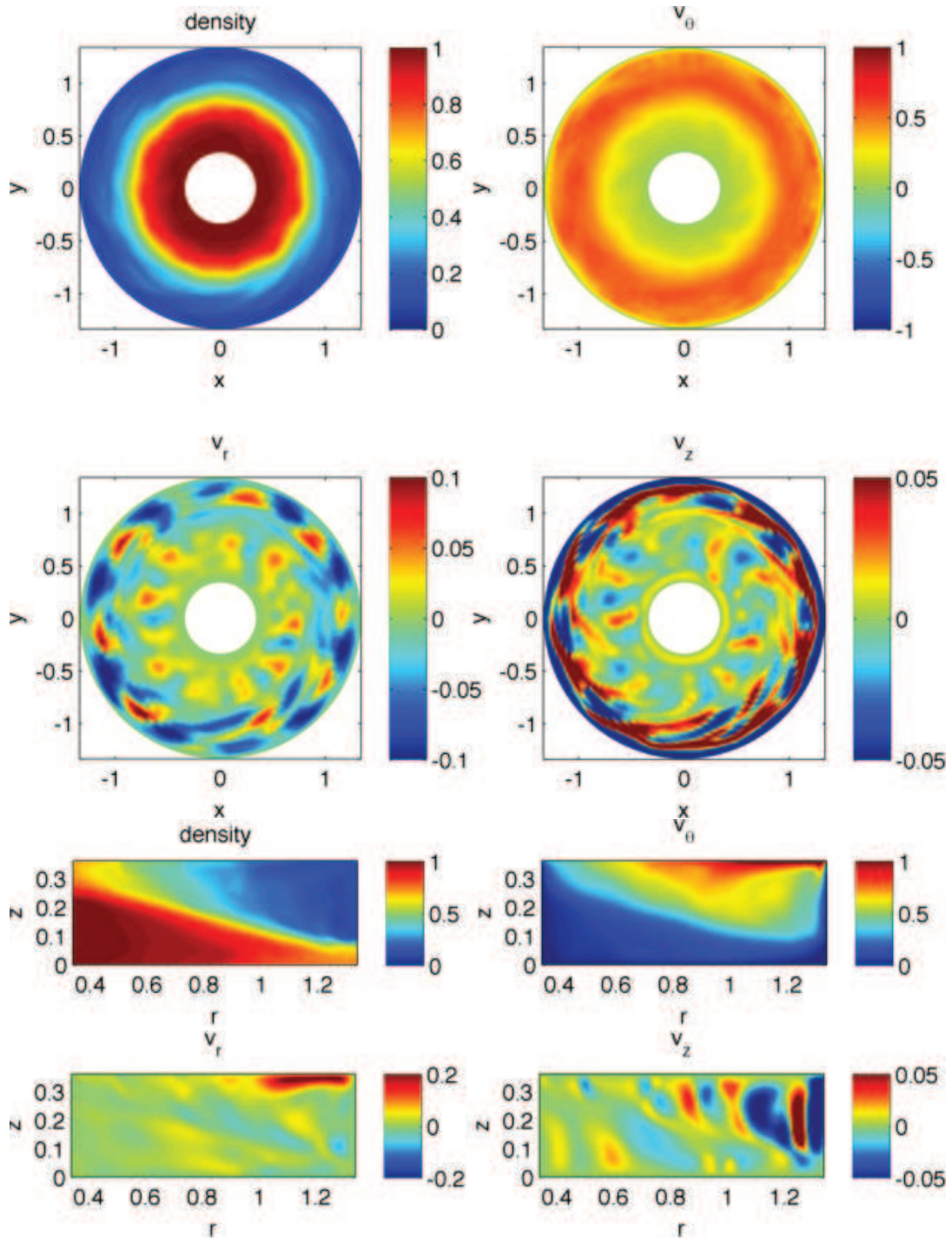
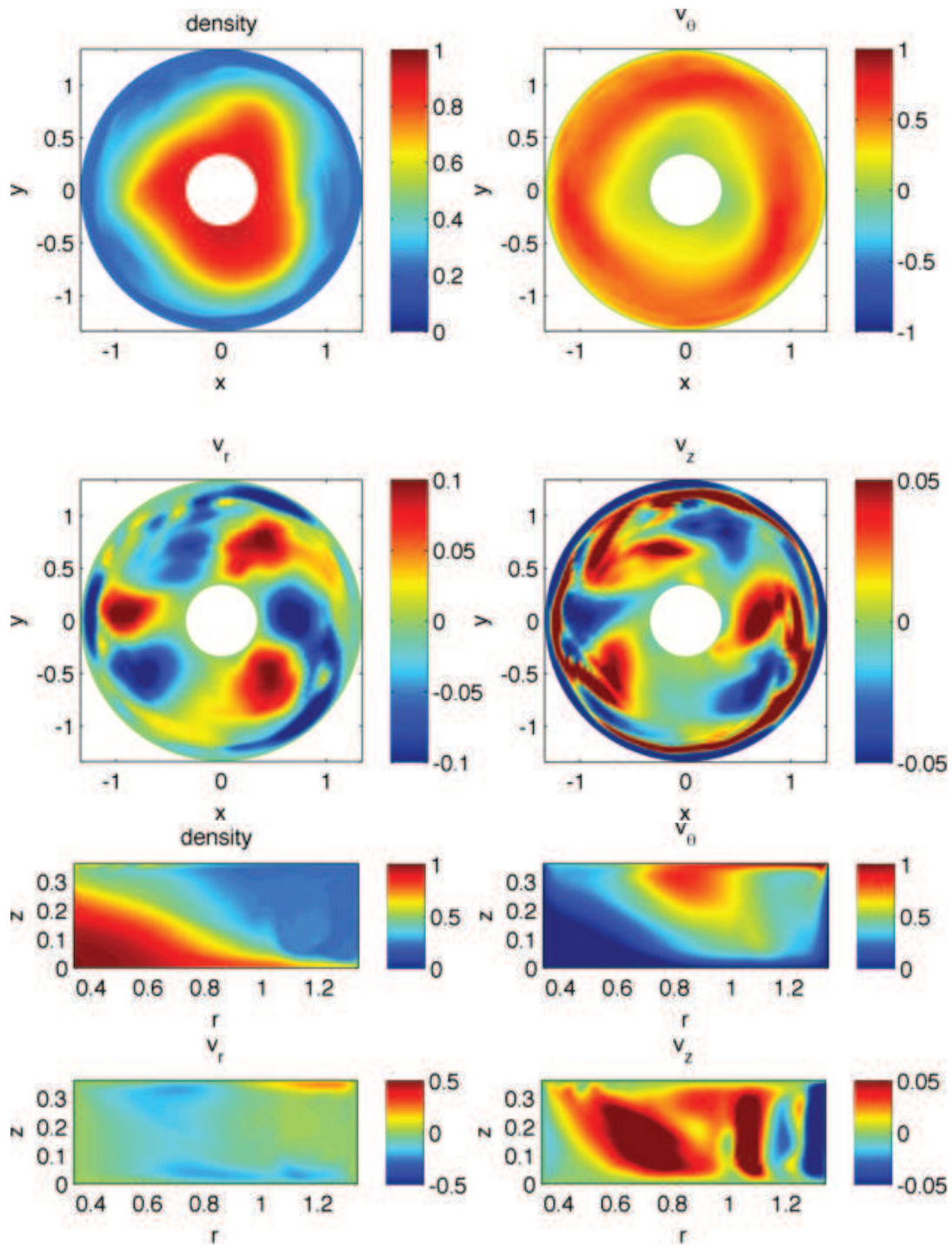


Fig 8.4.: Density, azimuthal, radial and vertical velocity in the mid-plane and in the  $r$ - $z$  plane for numD2 at  $t=47.5$  : instability with high wave number.

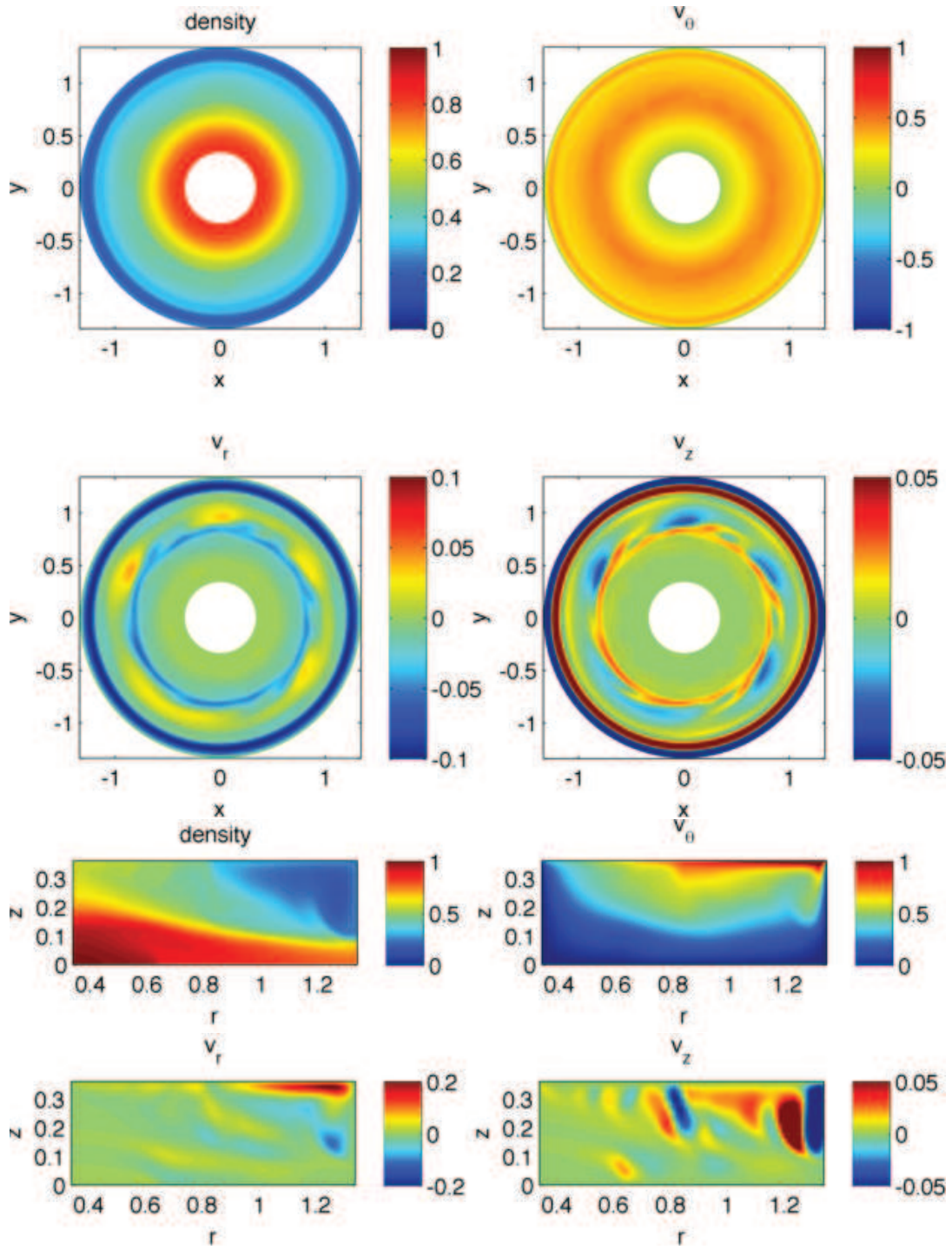


**Fig 8.5.:** Density, azimuthal, radial and vertical velocity in the mid-plane and in the  $r$ - $z$  plane for  $\text{numA}$  at  $t=84$ .

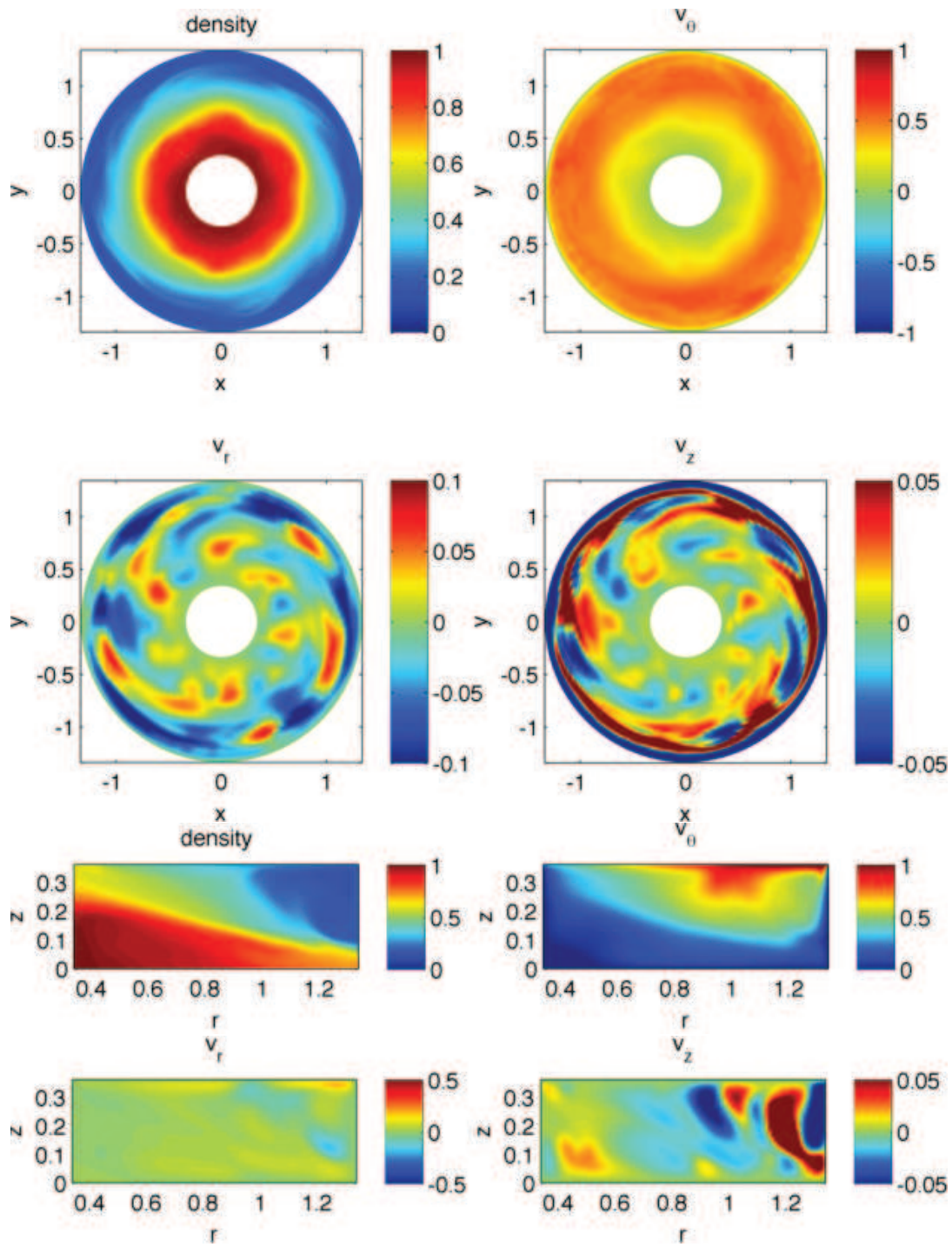


**Fig 8.6.:** Density, azimuthal, radial and vertical velocity in the mid-plane and in the  $r$ - $z$  plane for  $\text{numA}$  at  $t=150$ .

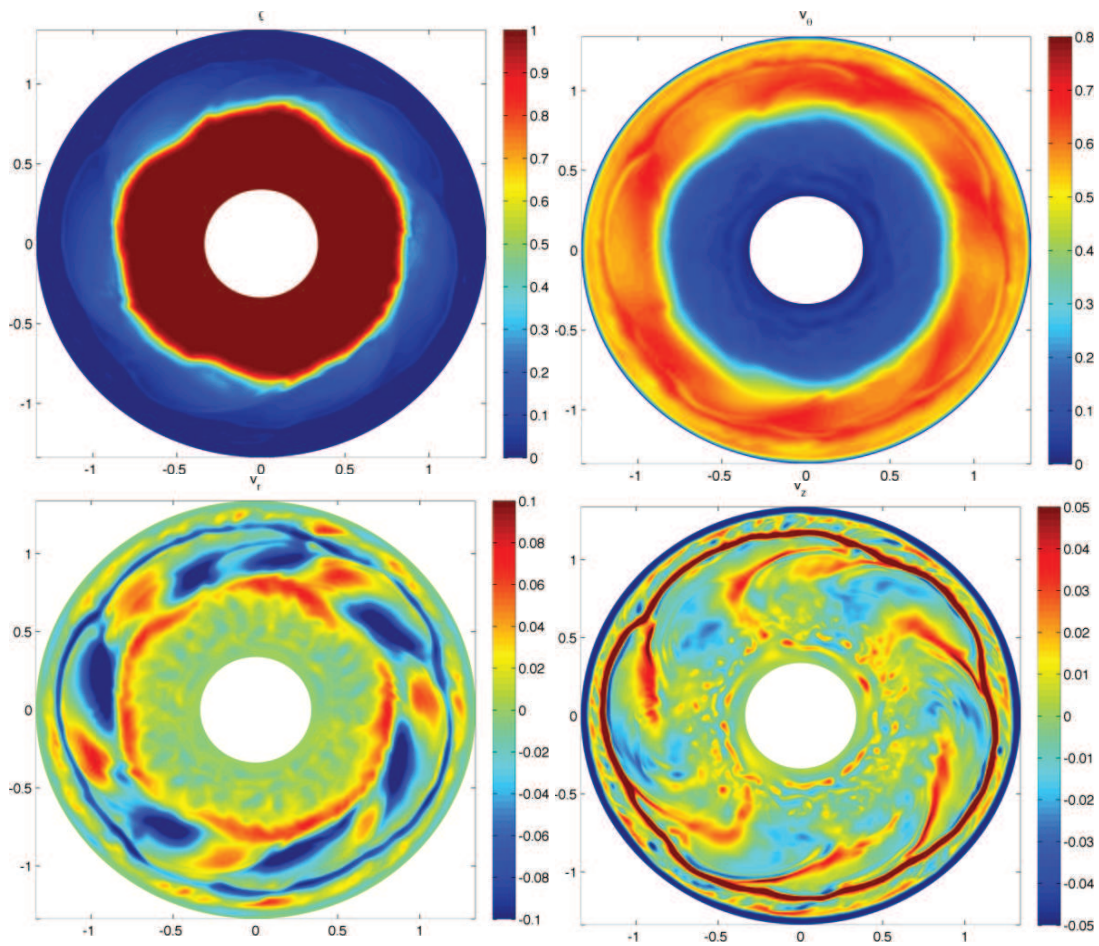




**Fig 8.7.:** Density, azimuthal, radial and vertical velocity in the mid-plane and in the  $r$ - $z$  plane for  $\text{numH}$  at  $t=138$ .



**Fig 8.8.:** Density, azimuthal, radial and vertical velocity in the mid-plane and in the  $r$ - $z$  plane for  $\text{numG}$  at  $t=111$ .



**Fig 8.9.:** Density, azimuthal, radial and vertical velocity in the mid-plane for numA-mil at  $t=81$ .

## 8.3. Instabilities with large wavenumber

### 8.3.1. Exploration of the diagram

Figures 8.5,8.6,8.7,8.8,8.4,8.3 represent the density<sup>†</sup>, azimuthal and vertical velocity in top and side view, and show the presence of the instabilities. In zones where growth of baroclinic instability can be expected, numD and numA show large modes for large times in the simulation. In other snapshots of these simulations (figures 8.9,8.8,8.4,8.7,8.5), one can see mesoscale instability at locations where Rossby- Kelvin instability has been observed in experiments. In all these simulations the modes evolved from high wave number to smaller wave number. However, for the simulations at Sc=20, the vertical density distribution changes in time (see figure 8.6) so that the Burger number is also modified. This makes an exact comparison between the numerical and experimental results in the diagram of figure 8.2 difficult. In the next results we will focus on the high resolution simulation numAmil (figure 8.9) for Sc=100. In particular, velocity fields are considered to investigate the nature of the observed instability.

### 8.3.2. Instability criteria

First we consider the general necessary instability criteria (Rayleigh-Kuo and Charney criteria) by investigating the horizontal and vertical gradient of the potential vorticity (see the reminder in section 3.3). By using a threshold method for the position of the interface between the layers, we determine the thickness of the two layers. Then we calculate the shallow-water potential vorticity defined as  $PV = \frac{\zeta + f}{h(r)}$  where  $\zeta$  is the z-component of the relative vorticity for two azimuthal profiles located in each layer at a time located before the instability occurs (figure 8.10).

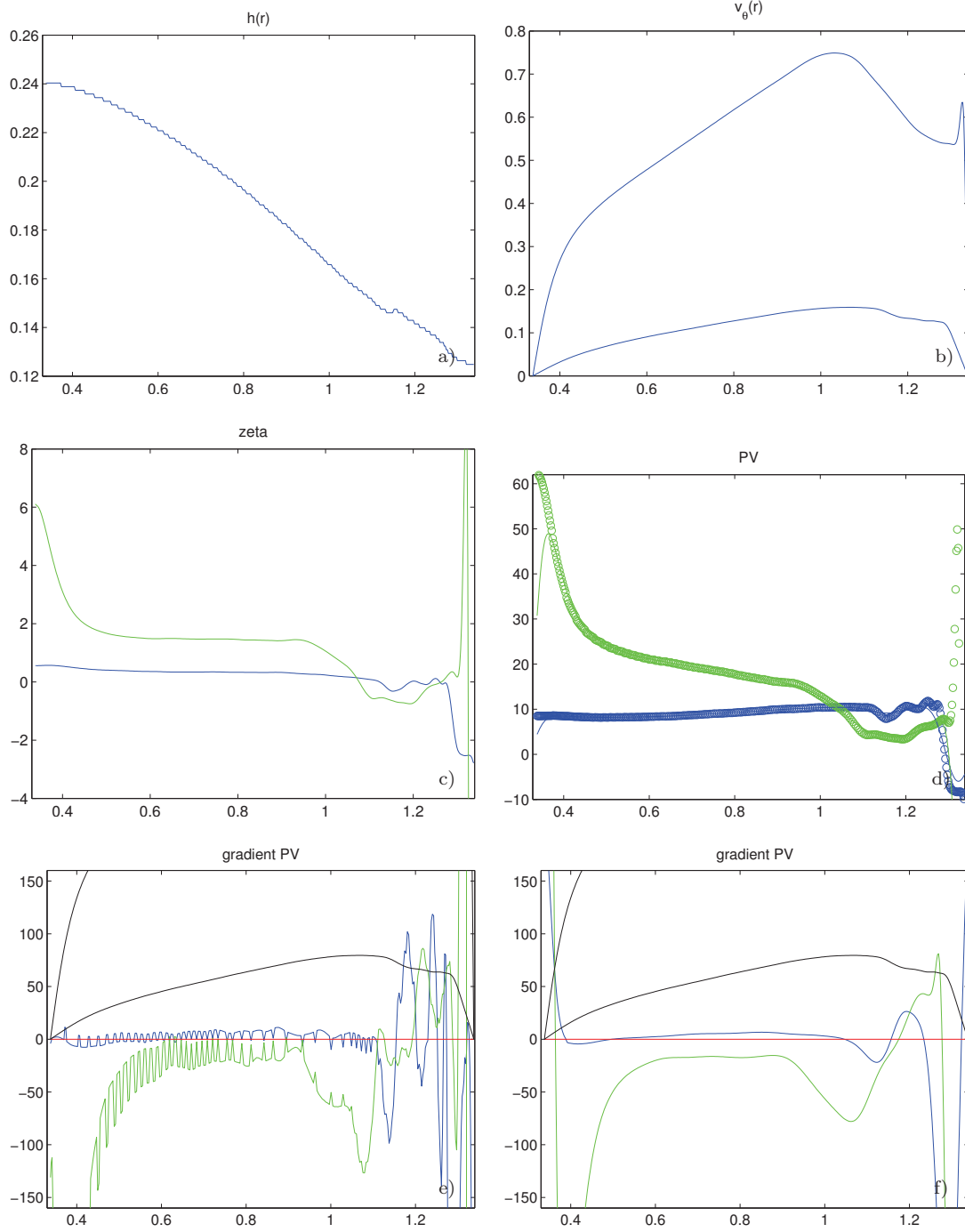
As the gradient of PV in the lower layer changes sign near  $r=1$  and possibly also near the internal cylinder, the Rayleigh-Kuo criterium induces a possible barotropic instability. In the upper layer, this necessary condition for barotropic instability is around  $r=1.2$ . In the center of each layer, the gradient of the potential vorticity does not change in sign horizontally. Nevertheless, as seen in this section 3.3 with the generalized theorem derived by Ripa, instability of Rossby-kelvin type is still possible in cases when the potential vorticity does not change sign. However instability of baroclinic type is also possible since, for a radius in the range  $[0.6-0.8]$ , the sign of the potential vorticity change in the vertical direction.

Keep in mind that these instability criteria remain necessary conditions for instability but are not sufficient. A closer look at the structure of the velocity fields is essential to determine the nature of the resonance and the nature of the

---

†.  $\frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}$





**Fig 8.10.:** a) Interface height for simulation numAmil at  $t=49.0$  b) Azimuthal velocity profiles in each layer c) Relative vorticity in each layer : blue : lower layer and green : upper layer d) Potential vorticity in each layer : blue : lower layer and green : upper layer. e) Gradient of Potential vorticity in each layer : blue : lower layer and green : upper layer (in black is superimposed the azimuthal profiles). Discontinuities are due to little steps in the interface height due to the threshold and the resolution. The PV plots are smoothed with a convolution filter in f). All the plots are in dimensionless variables.



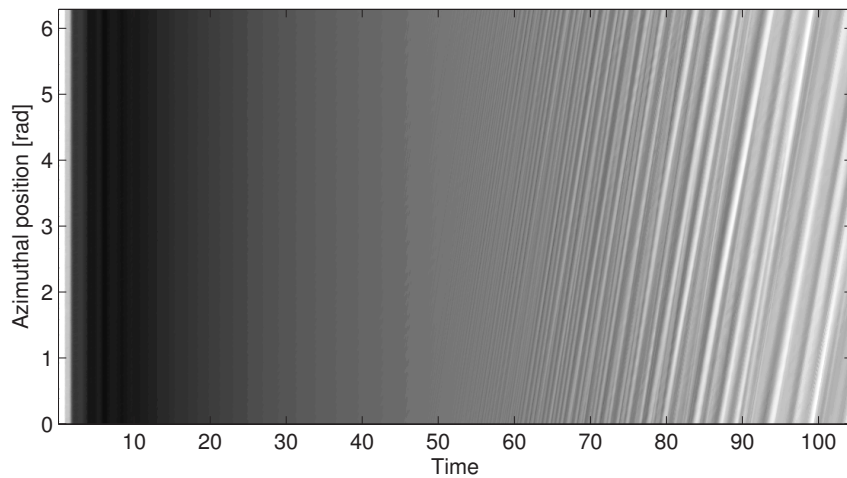
present instability in the simulation.

### 8.3.3. Evidence of Rossy-Kelvin Instability

#### Structure of unstable modes

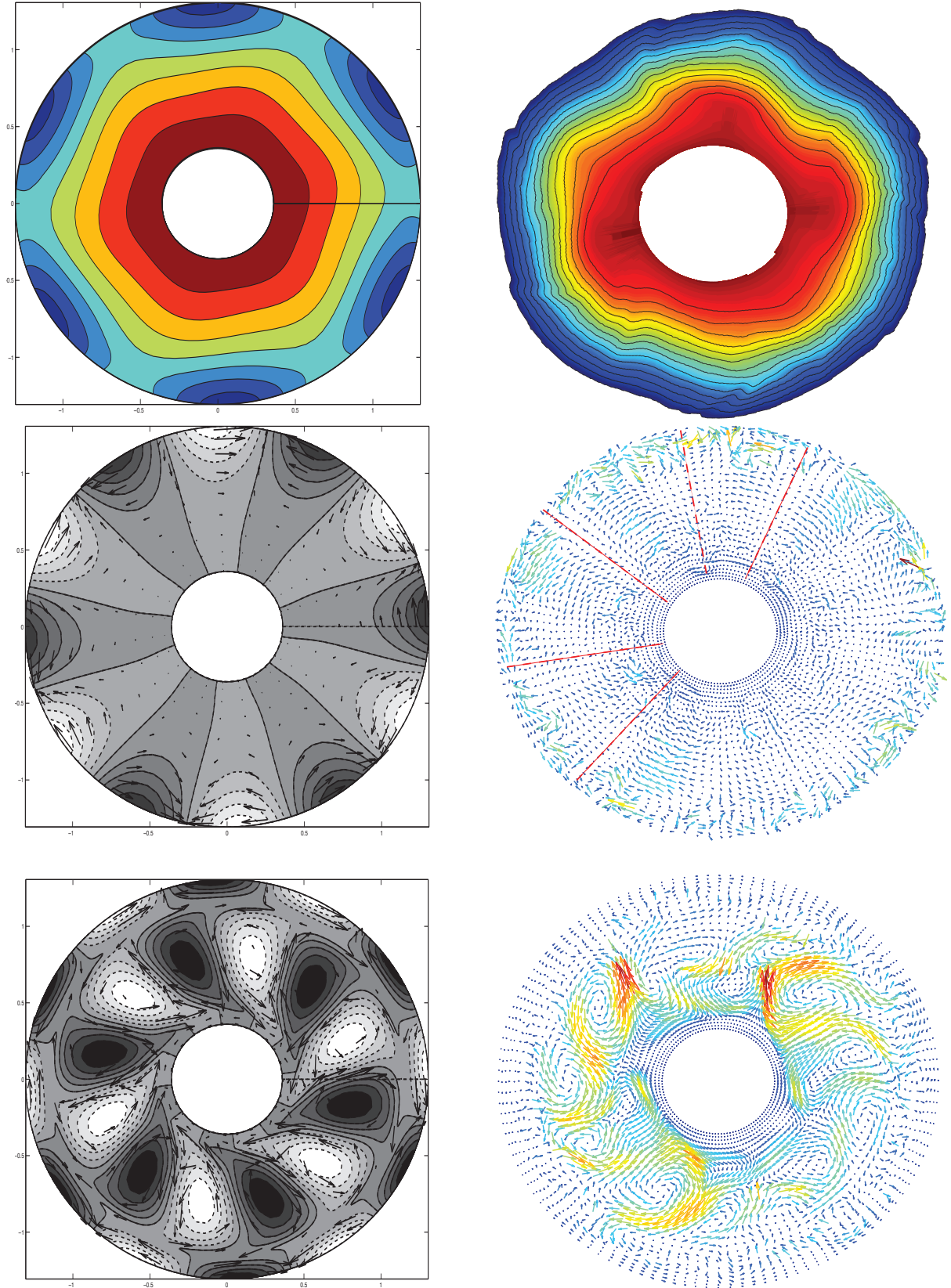
Figure 8.11 (right side) shows the top views of the interface height, and the velocity field of each layer after subtraction of the mean velocity field. It reveals that the structure in each layer is different. In the lower layer, the maximum velocity is near the external boundary and there is a decay in amplitude in the radial direction from the wall, whereas the direction of the vectors alternate in the structure. This structure can be identified as a Kelvin wave. In the upper layer, the structure of a Rossby wave is well reproduced with the presence of cyclones and anticyclones. These velocity fields are in very good agreement with stability results for Rossy-Kelvin instability (figure 8.11 left and also [Gula \(2009\)](#)). The analysis of these velocity fields provides evidence of the resonance of a Rossby wave in the upper layer and a Kelvin wave propagating on the external cylinder in the lower layer, giving rise to the Rossby-Kelvin instability.

#### Growth and wave speed

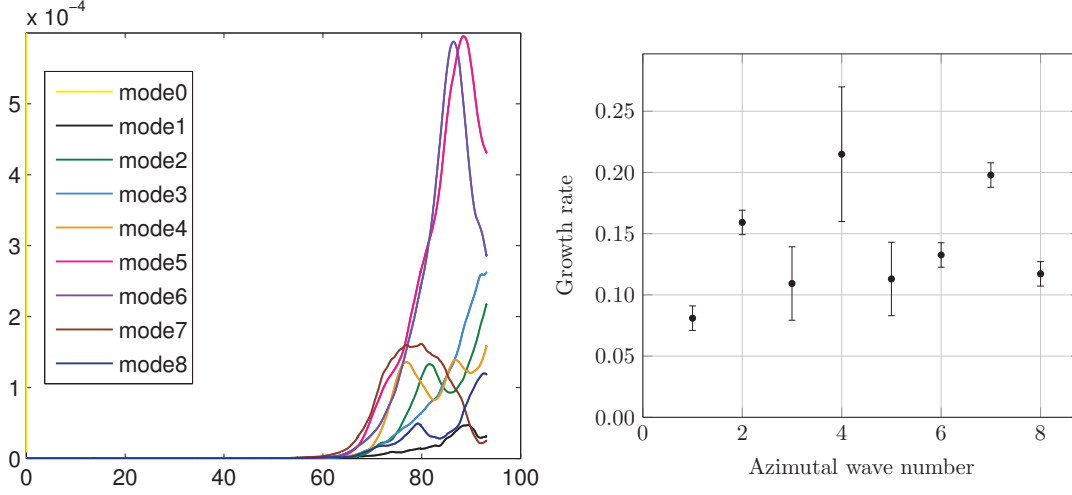


**Fig 8.12.:** *Space-time diagram of numAmil. Growth of RK instability appears around  $t=50$ .*

To obtain the spatio-temporal evolution of the interface illustrated figure 8.12, the interface position is determined using a threshold method on the horizontal mid-plane similar to the one used for experiments (see section 5.3). The beginning of the instability occurs around  $t=50$  and the modes grow with a decreasing



**Fig 8.11.:** Comparison between numerical simulation *numAmil* at  $t=81$  (Right) and linear stability results with close parameters (Gula personal communication)(Left). Upper to lower figures : a) interface height field, b) velocity field in the lower layer, c) velocity field in the upper layer. The linear stability results also shows pressure field in shading.



**Fig 8.13.:** *Left : Evolution of the amplitude of the amplitude of the energy modes. Right : Growth rate for each mode*

wavenumber. The evolution of each wavenumber can be followed by using the azimuthal mode decomposition of the kinetic energy of the flow.

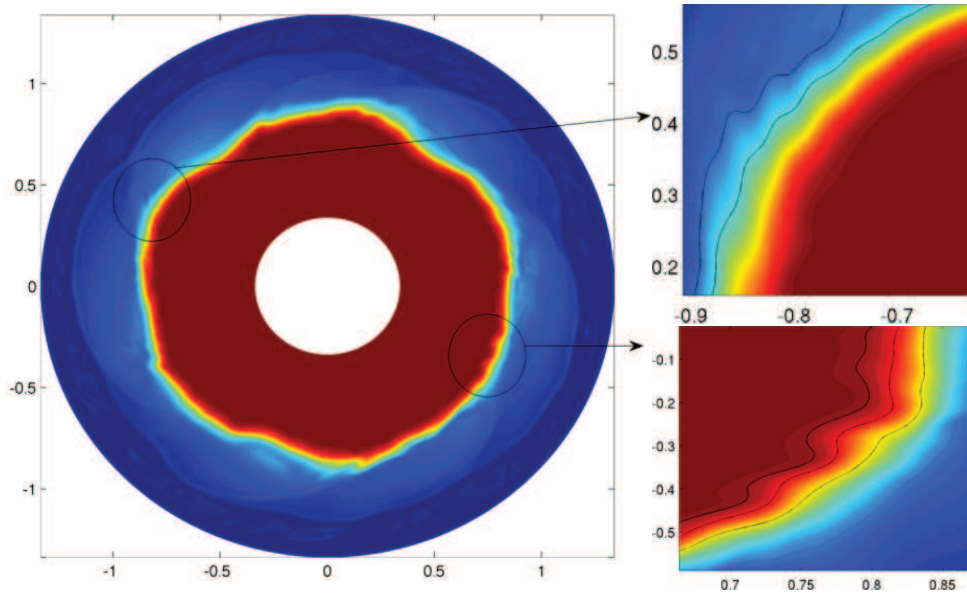
For each wavenumber, the temporal evolution of the energy mode  $E(k) = \int_r \int_z \hat{u} \cdot \hat{u}^* dr dz$  is shown figure 8.13 left (here,  $\hat{u}(r, k, z)$  is the Fourier-transform of the velocity vector  $u(r, \theta, z)$  in the azimuthal direction and  $\hat{u}^*$  complexe conjugate of  $u$  and with the integrals performed over the radial and vertical directions of the computational domains).

Initially, the growth of the wavenumbers 5,6 and 7 is dominant followed by a progressive growth of smaller wavenumbers (3,4,2). Since all the crests are almost parallel, for  $c/f$  we estimate an order of magnitude of 0.48-0.49 for all modes. To measure the growth rate, the amplitude of each mode is fitted with an exponential function and yields a mean value around 0.15 (see figure 8.13). This growth rate is at least an order of magnitude (or even two) higher than that obtained with linear stability results (Gula personal communication). This difference can be interpreted as the result of nonlinear wave interactions.

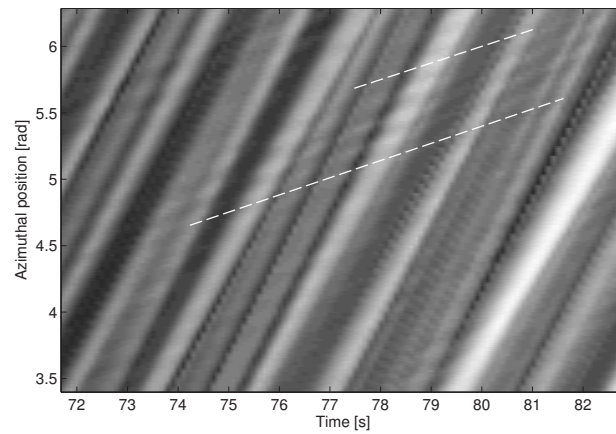
## 8.4. Small-scale perturbations

Several small-scale perturbations are also present on the front in addition to the Rossby-kelvin mode (see figure 8.14). They are also visible in the space-time diagram in figure 8.15 with waves lines characterized by a phase velocity much smaller than that of the Rossby-Kelvin mode and correspond to nondivergent motions as illustrated figure 8.16. As discussed in detail in section 4.4, the question of the nature of these small-scale perturbations is of great inter-

est for the understanding of ageostrophic motions in the atmosphere. For the quantitative exploration of the present small-scale perturbations, we will focus on those present at  $t=81$  in the two sectors illustrated in figure 8.14.



**Fig 8.14.:** *Density front at  $t=81$ . Zoom on small-scale perturbations*



**Fig 8.15.:** *Small-scale perturbations located between the dashed white lines superimposed on the larger mode and propagating much more slowly than the mode wave.*

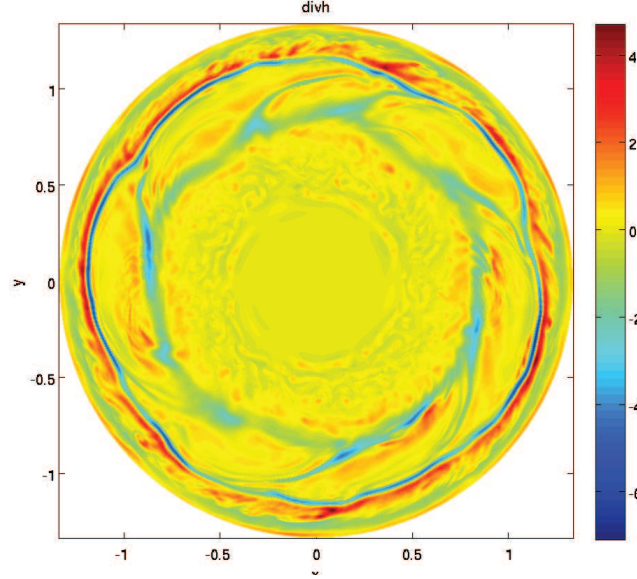


Fig 8.16.: Horizontal divergence of the flow at  $t=81$  at mid-height.

#### 8.4.1. Stratified shear instabilities

To determine the nature of small-scale perturbations, we first assess the stability of the flow in terms of stratified shear instabilities.

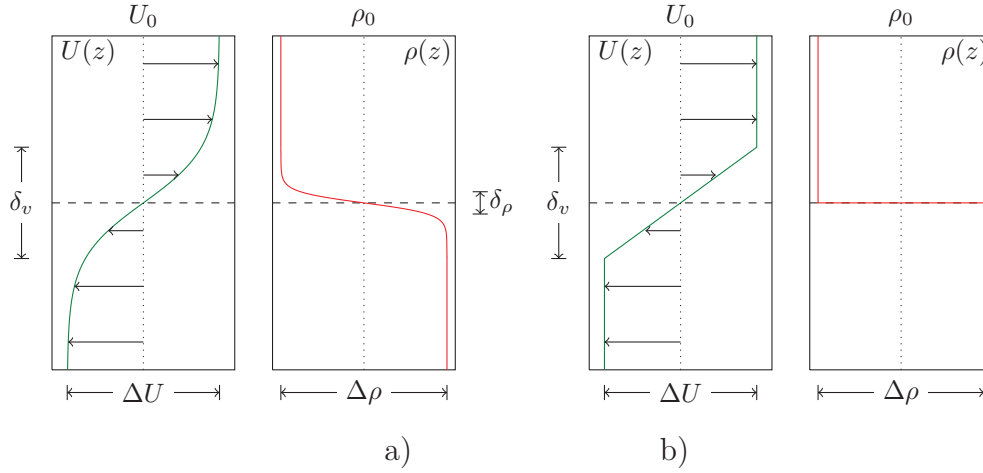
##### Miles-Howard criterion

A first criterion for shear instability has been derived by Miles (1961, 1963) and Howard (1961) and gives insight about stability properties of the flow without solving any equations. If we define the gradient Richardson number  $Ri(z) = N^2 / (dU/dz)^2$  where  $N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z}$  is the Brunt vaissala frequency with a reference density  $\rho_0$ , the criterion states : If  $Ri(z) \geq 1/4$  everywhere in the profile, then the flow is stable. It is a sufficient condition for stability. If  $Ri(z) < 1/4$ , unstable modes are possible but it is not a sufficient condition for determining instability.

##### Taylor-Goldstein equation

We consider locally a parallel shear flow with  $U_\theta = U(z)$  and  $\rho(z)$  the background velocity and density. Even if both in experiments and in simulations the amplitudes are finite, we can consider small normal mode perturbations  $\exp(ik(\theta - ct))$  and the linearized equations of motions. For an inviscid bousinesq fluid, the stability of a stratified shear flow is then given by the Taylor-





**Fig 8.17.:** Density and velocity profiles in a stratified shear layer : a) hyperbolic tangent profiles. b) modelisation with piecewise profiles

Goldstein equation

$$\psi'' - \left[ k^2 + \frac{U''}{U - c} - \frac{N^2}{(U - c)^2} \right] \psi = 0 \quad (8.1)$$

where  $\psi$  is the stream function. This equation has been studied extensively by Hölmböe (1962), Hazel (1972), Lawrence *et al.* (1991), Ortiz *et al.* (2002), Pouliquen *et al.* (1994), Alexakis (2005, 2007, 2009).

The experimental density and velocity profile of a two-layer stratified shear flow can be modeled by hyperbolic tangent profile :

$$U(z) = U_0 + \frac{\Delta U}{2} \tanh\left(\frac{2(z - d)}{\delta_v}\right) \quad (8.2)$$

$$\rho(z) = \rho_0 - \frac{\Delta \rho}{2} \tanh\left(\frac{2z}{\delta_\rho}\right) \quad (8.3)$$

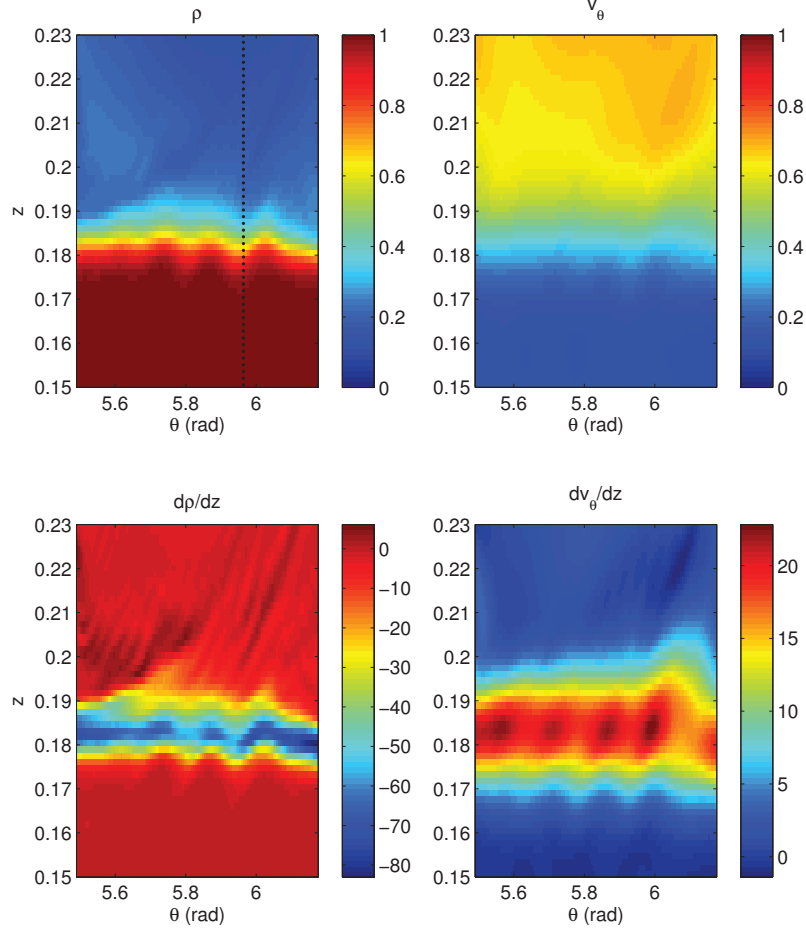
(see figure 8.17a)

Following Hölmböe (see Tedford *et al.* (2009) Carpenter (2009) and Ortiz *et al.* (2002), Lawrence *et al.* (1991)) we define the three dimensionless parameters :

$$J \equiv \frac{g \Delta \rho 2 \delta_v}{\rho_0 (\Delta U)^2} \quad R \equiv \frac{\delta_v}{\delta_\rho} \quad \text{and} \quad a \equiv \frac{2d}{\delta_v} \quad (8.4)$$

where  $\rho_0 = (\rho_1 + \rho_2)/2$ ,  $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$  and  $\Delta U = U_2 - U_1$ . We will also use the dimensionless wavenumber  $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\delta_v}{2}$  based on half the shear thickness  $\delta_v/2$ .

For simplicity we consider  $\delta_v \gg \delta_\rho$  and use a model with piecewise constant velocity profile and a jump in density Ortiz *et al.* (2002) as illustrated figure

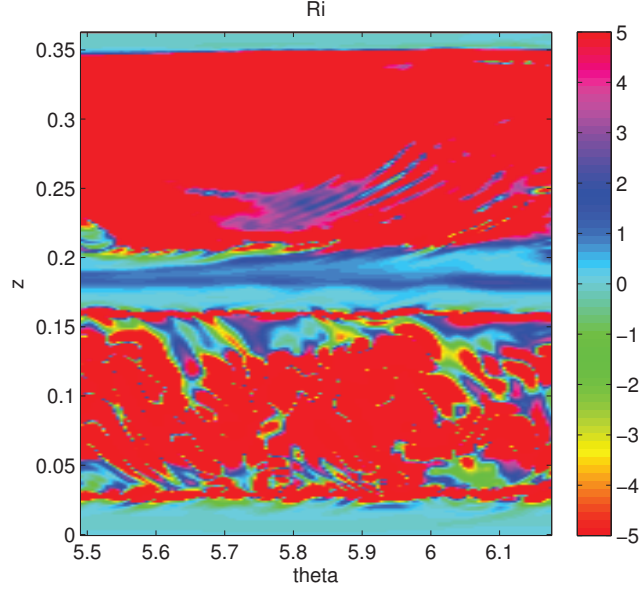


**Fig 8.18.:** *Density, azimuthal velocity and their derivative with respect to  $z$  in the plane  $\theta - z$  in the range of angle where small-scale perturbations are seen at  $t=81$  ( $\approx$  mid-annulus radial position).*

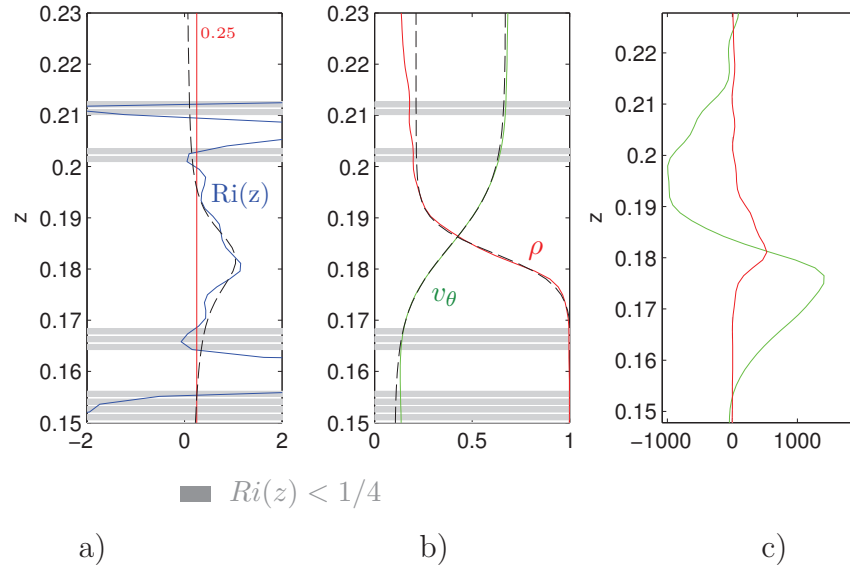
8.17 b). In this piecewise model,  $J$  keeps the same definition,  $a=0$  and  $\delta_\rho$  is not relevant.

Figures 8.18 and 8.19 show density, azimuthal velocity and gradient Richardson number in the plane  $\theta - z$  where small-scale perturbations are present. Figure 8.20 shows the profiles in  $Ri$ , density and azimuthal velocity and  $U''$  and  $N^2$  for a given angle specified by the black line the figure 8.18. All the areas in gray shading represent domains where  $Ri(z) < 1/4$ . Applying the Miles criterion one can see that there are zones with  $Ri < 1/4$  but all located above the max of  $N^2$ . This configuration can be compatible with a Hölmböe instability in contrast to the Kelvin-Helmholtz instability where areas with  $Ri(z) < 1/4$  are expected where  $N^2$  is maximum.





**Fig 8.19.:** Gradient Richardson number in the plane  $\theta - z$  at  $t=8$



**Fig 8.20.:** Local profiles taken for an approximately mid-annulus radial position and for the angle shown with the black line in figure 8.18 a) blue : Gradient Richardson number. Grey : areas where  $Ri(z) < 1/4$  (in red is the line  $Ri=1/4$ ). The dashed line corresponds to the gradient Richardson number calculated using the hyperbolic tangent fitted profiles for density and velocity. b) green : velocity profile. red : density profile. Dashed line : fitting of the profiles by hyperbolic tangent functions. c) green :  $\frac{d^2 v_\theta}{dz^2}$ . red :  $N^2$

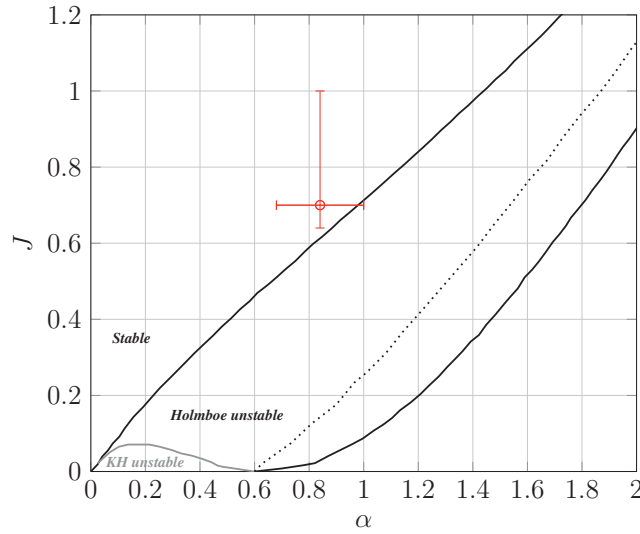
### Comparison with model with piecewise profiles

To test the Hölmboë instability hypothesis, in a first analysis we consider piecewise profiles and study the analytical obtained diagram of wavenumber against bulk Richardson number. Here the bulk Richardson number is measured from the profiles as illustrated in figure 8.20. Table 8.2 recapitulates thus obtained results for the shear and density profiles.

$g\Delta\rho/\rho_0$	$\Delta U$	$\delta_v$	J	Ri(0)/R	R
0.0462	$0.56 \Delta\Omega$	0.0125-0.0131 ( $\times L$ )	0.69	0.63	1.84-2.18

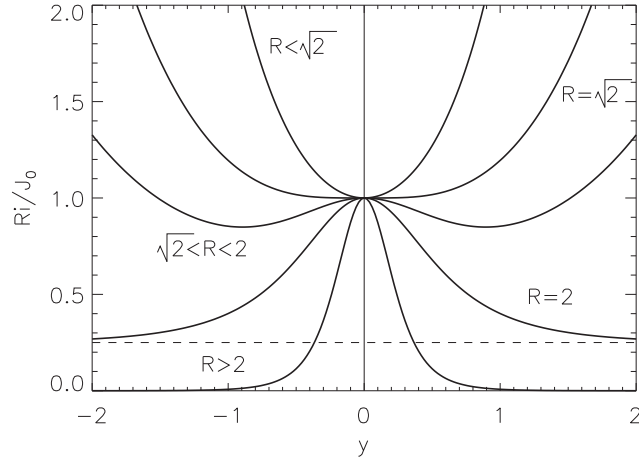
**Table 8.2.:** *Measurements of the global properties of density and velocity profiles for  $t=81$  in the locations of small-scale perturbations*

By fitting the profiles by the tanh of the equation 8.3, we can measure the aspect ratio between shear and density thickness R and also double-check the value of the bulk richardson. Indeed in the case of tanh profiles we have the following identity between bulk and gradient Richardson number :  $J=\text{Ri}(0)/R$  (see Alexakis (2009)).

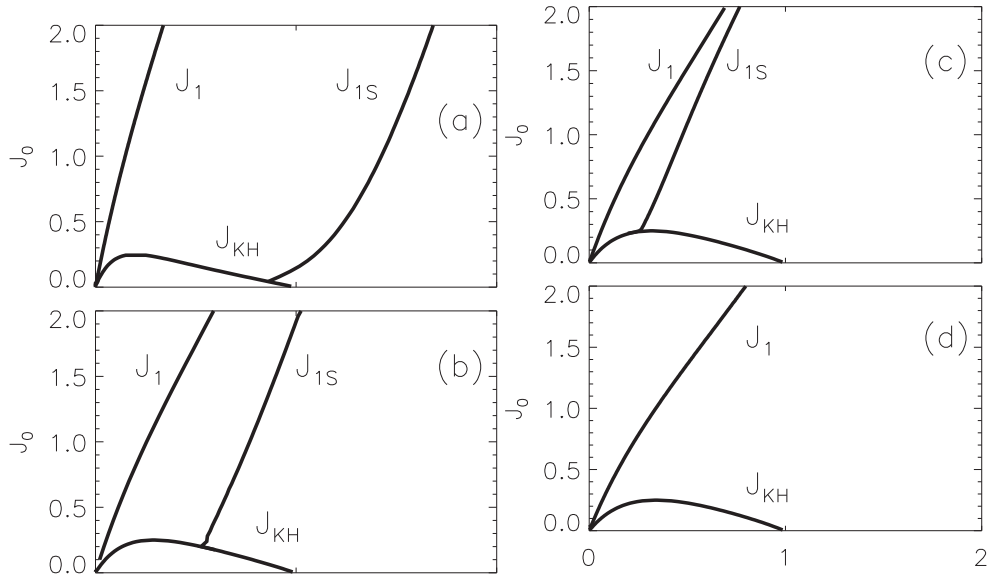


**Fig 8.21.:**  $\alpha - J$  instability diagram for piecewise profiles. The red point corresponds to the measurement for small-scale perturbations on the front.

As illustrated figure 8.21, when reporting the wavenumber and the value for bulk Richardson number in the diagram  $\alpha$ -J (we use the convention  $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\delta_v}{2}$  here), it appears that the small-scale perturbations are found to be out of the unstable domain of the Hölmboë instability.



**Fig 8.22.:** Profiles of the gradient Richardson number depending on the thickness ratio  $R$ . (from [Alexakis \(2005\)](#)). The  $y$  in his article is the variable corresponding to the vertical direction (labelled  $z$  in our text).)



**Fig 8.23.:** Change of the diagram  $\alpha - Jo$  ( $Jo = J.R$ ) with the thickness ratio  $R$  (from [Alexakis \(2005\)](#)). a)  $R=4$  b)  $R=2.5$ , c)  $R=2.2$ , d)  $R=2$ . In the figure d), the two stability boundaries (named  $J_1$  and  $J_{1S}$ ) have collapsed together in a line thus only separating existence between non-singular gravity wave modes on its left from the region where only singular neutral modes (at the right of the line) exist.

### Comparison with results for smooth hyperbolic tangent profiles

The above analysis is rough since the length scale for stratification and consequently the aspect ratio  $R$  between shear and density thickness can be finite and therefore changes the instability diagram. Indeed the variation of the gradient Richardson number varies drastically with  $R$  (figure 8.22). Alexakis (2005) highlights that the stability diagram depends accordingly on the thickness ratio (see figure 8.23)

Considering this variability of the diagram, we focus now on the value of  $R$ . Table 8.2 indicates measured values of  $R=1.84-2.18$ . Literature on Hölmboë instability has long considered the apparition limit of Hölmboë instability at the value  $R=2.2$  (or even 2.4) and the recent results from Alexakis show that the location limit is eventually  $R=2$ . As illustrated figure 8.23, the unstable Hölmboë domain for cases of  $R$  just above  $R=2$  is very thin and becomes a line at  $R=2$ . Our value  $R=1.84-2$  being located under or equal to 2 suggests that these small waves are again likely not Hölmboë waves.

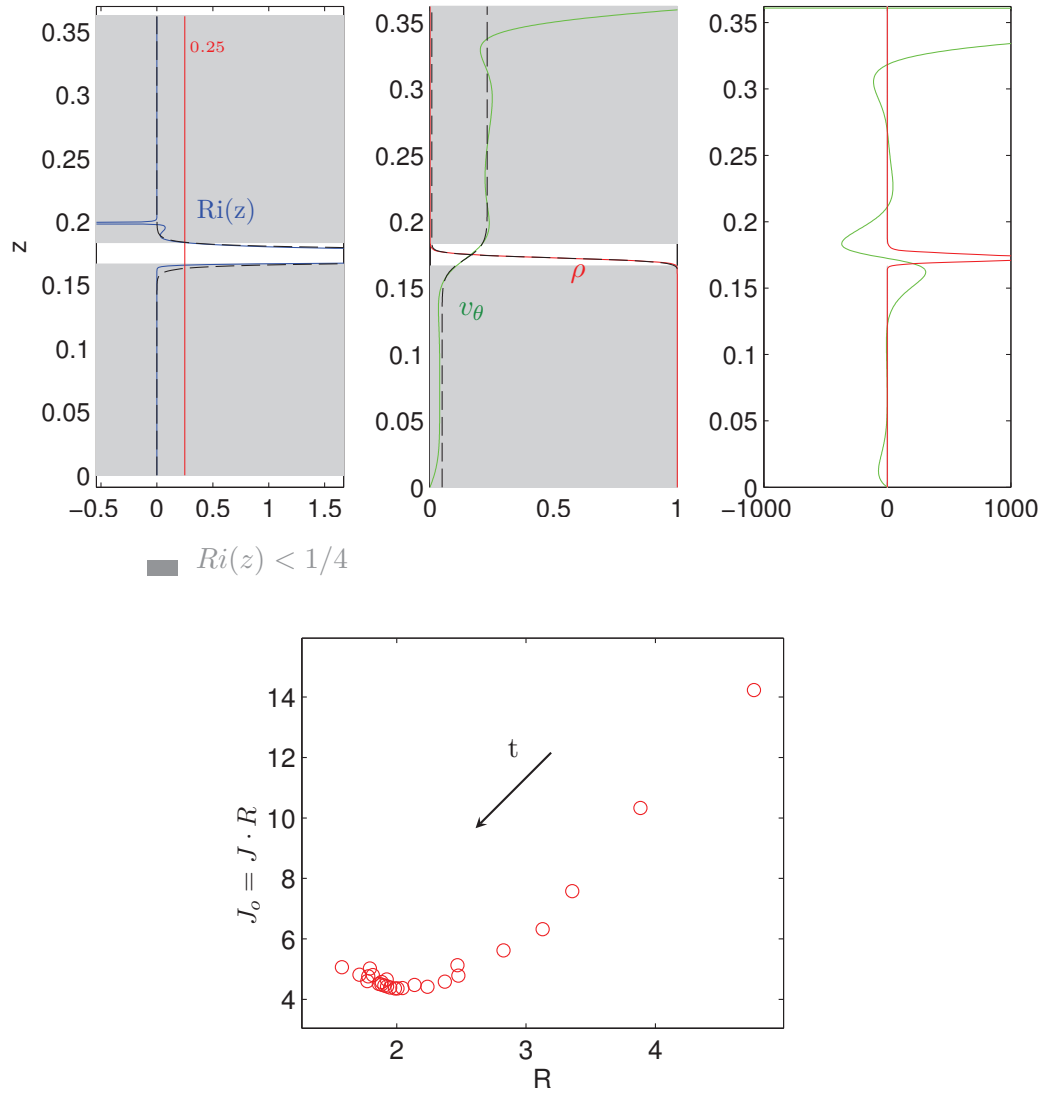
Moreover characteristics of the present small-waves differ from experimental waves interpreted as Hölmboë waves as they are located here only on crests of the larger mode and not almost everywhere on the front.

#### 8.4.2. Shear instabilities in the initial time of a simulation with $Sc=700$ - Comparison with experimental Hölmboë waves

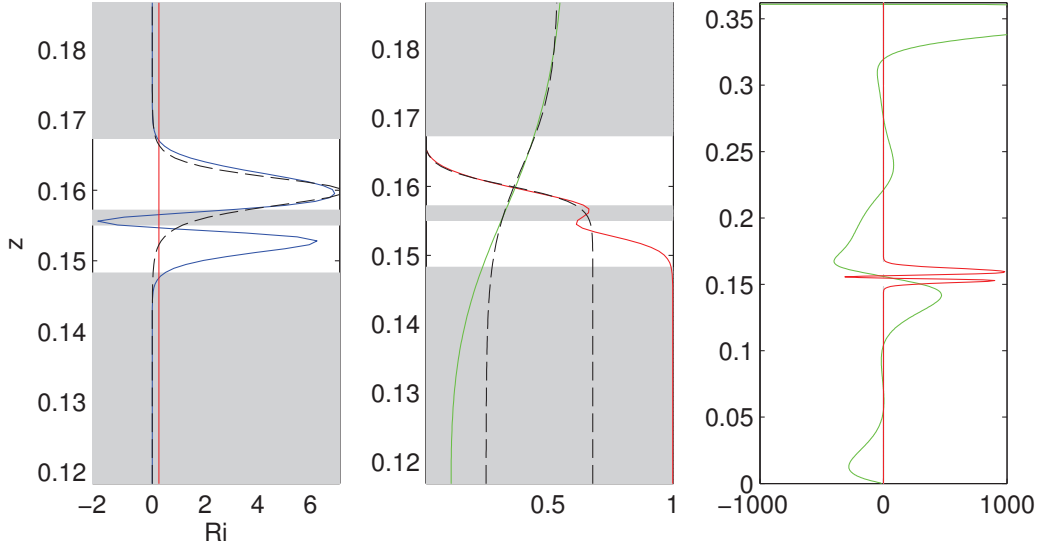
Since the small scale perturbation are likely to be due to another instability than shear instability, it is interesting to consider the high Schmidt number case, for comparable values as in the experiments of 700, and to investigate the variation of  $R$ . Such simulations require fine grids, and very small time steps and therefore are CPU and time consuming. This simulations has been carried out for an axisymmetrical configuration :  $N_\theta \times N_r \times N_z = 1 \times 700 \times 700$ . Care was taken for singularities and artificial instabilities that may appear for such high Schmidt numbers; singularities however did not appear in the region of interest.

For this simulation, figure 8.24 (up) illustrates that the ratio between shear and density thicknesses  $R$  is bigger especially in the beginning of the simulation. This ratio evolves from high  $R$  value associated to the possible presence of Hölmboë instability to reach the critical value  $R=2$ . This suggests that the holmboe instability is possible at the beginning and then may disappear due to a less sharp front. Changes in the density profiles can also lead to situation favorable to Kelvin-Helmoltz instability as illustrated figure 8.25 where the gradient richardson is the central zone.

This digression highlights the key role of the ratio between shear and density thicknesses and the complexity of determining instability due to the change of the instability diagram.



**Fig 8.24.:** Up : From left to right : Richardson number, density and velocity profiles and  $U''$  and  $N^2$  profiles (see figure 8.20 for details) at the beginning of a simulation with  $Sc=700$ . Down : Evolution of the values of  $R$  and  $Jo$  in time with value at initial times around the point with  $Jo \approx 14$  and  $R > 4$  and the values evolved to the left with time with values of  $R$  for advanced time around  $R=2$ .



**Fig 8.25.:** Up : From left to right : Richardson number, density and velocity profiles and  $U''$  and  $N^2$  profiles (see figure 8.20 for details) in the simulation with  $Sc=700$  in a configuration where Kelvin-helmholtz instability is possible with gradient Richardson number verifying  $Ri(z) < 1/4$  in the central zone of the density profile.

### 8.4.3. Inertia-gravity waves

Returning to simulation numAmil, we demonstrated that the presence of small-scale perturbations superimposed on the Rossby-Kelvin mode are not due to stratified shear instability. We now test the possibility of the presence of inertia-gravity waves. The stratification is not a linear stratification but a two-layer fluid. Consequently following Lovegrove *et al.* (2000), we compared experimental measurements of phase speed of the waves relative to the mean flow to theoretical phase speed given by the dispersion relation. The experimental measurement gives a value for the phase speed of  $c_{\phi/\text{front}}(\lambda = 9\text{cm}) = -3.5\text{cm/s}$ . Two theoretical formulas are associated with two limit cases for either a shallow-water or a deep-water approximation.

- In the shallow-water hypothesis considering  $1/k_{\text{horiz}} \gg H$ , the dispersion relation is written, in first approximation, considering an equilibrium basic state at rest :

$$\omega^2 = f^2 + k^2 g' \frac{H}{2} \quad (8.5)$$

where  $\omega$  is the intrinsic frequency of the wave taking account of the Doppler shift and so verifies  $\omega = kc_{\phi/\text{front}}$ . This gives  $|c_{\phi/\text{theoretical}}| \equiv 5.8 - 8.2\text{cm/s}$

- In the deep-water hypothesis considering  $1/k_{\text{horiz}} \ll H$ , the dispersion re-

lation is written (Lovegrove *et al.*, 2000) :

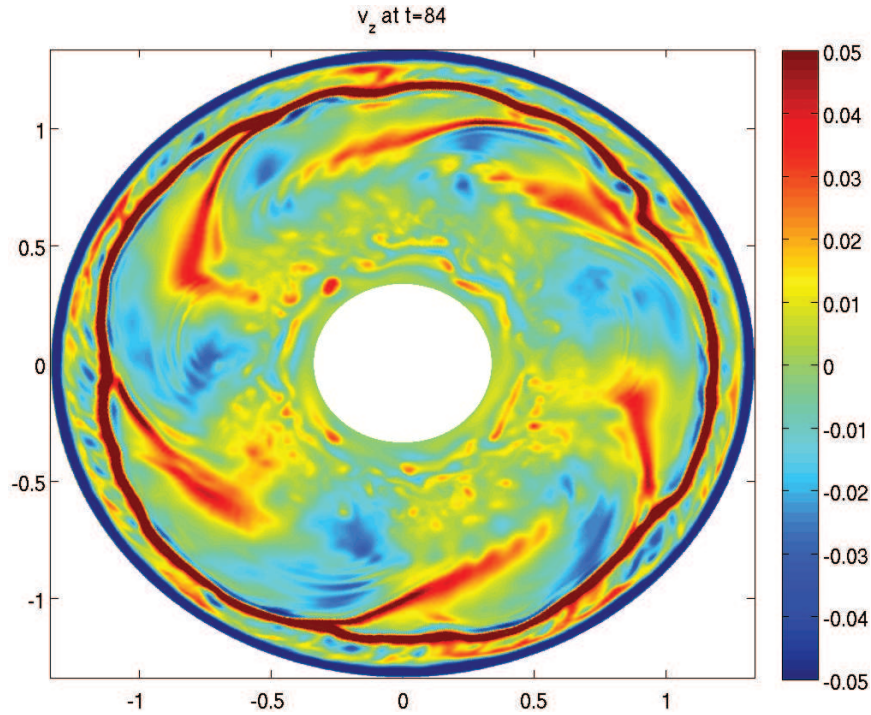
$$\omega^2 = \frac{f^2 + \sqrt{f^4 + 4g'^2(k^2 + l^2)}}{2} \quad (8.6)$$

This gives  $|c_{\phi \text{ theoretical}}| = 2.7 \text{ cm/s}$

Thus, the properties of the waves are compatible with inertia-gravity waves.

### Origin of inertia-gravity wave

A horizontal cross section (figure 8.26) reveals waves with phase lines presenting a circular structure. Small ondulations of the front are also clearly visible on high positive patches of vertical velocity at the top and the bottom of the figure 8.26. The corresponding vertical cross section is presented figures 8.28



**Fig 8.26.:** *Top view of the vertical velocity at mid-height at  $t=84$*

and 8.27 and the temporal evolution shows that these waves are propagating along the interface towards the external cylinder.

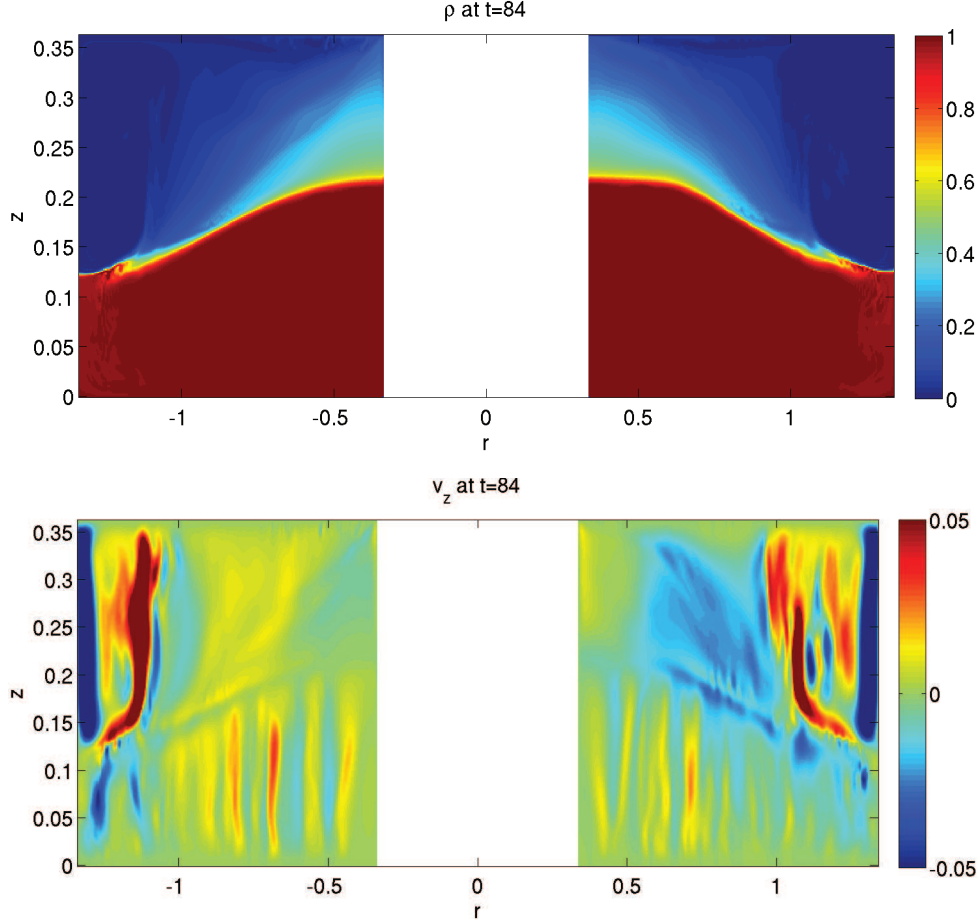
Several mechanisms can be responsible of generation of inertia-gravity waves when the usual orographic emission is not possible. (see introduction on generation mechanisms of inertia-gravity waves section 4.4.2). We will now evaluate some of them to propose a mechanism compatible with the current flow.

First, the simulation step is far from the beginning and the adjusted front has been obtained well before in the simulation so that the hypothesis of a classical



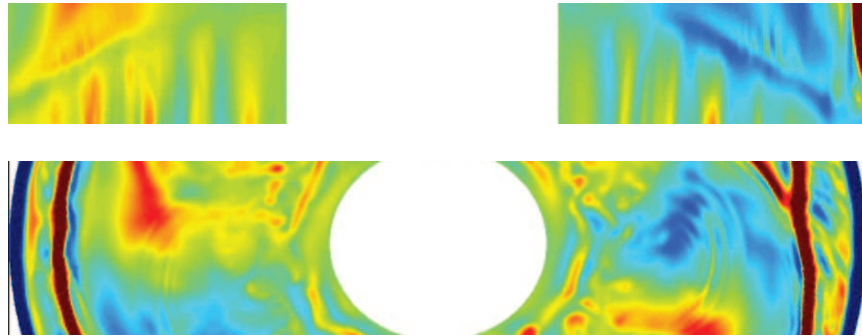
geostrophic adjustment associated with radiation of inertia-gravity waves is not probable here. Moreover the flow continuously radiate waves without showing a tendency to relax to an equilibrium without waves.

Then, even if the Rossby number is not very small, the scale of the wave is smaller than the unstable mode scale which suggests that Lighthill theory predictions of large wavelength is not appropriate for this case.

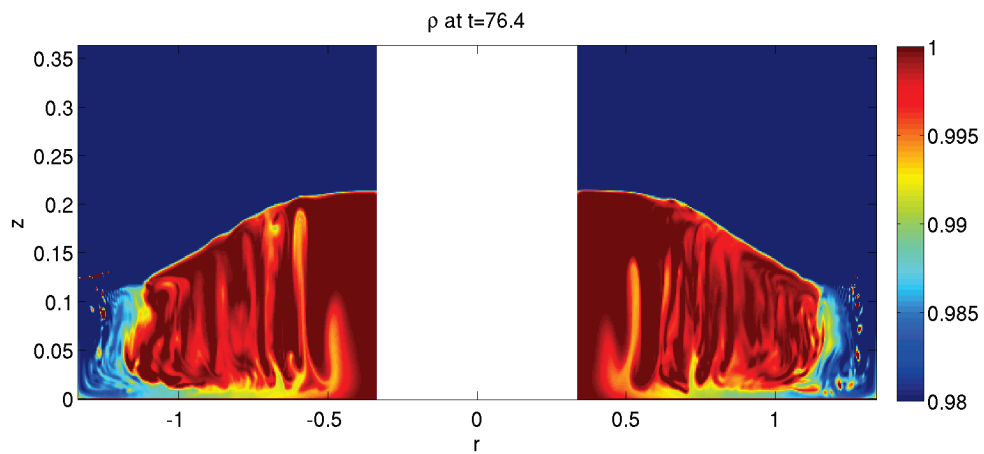


**Fig 8.27.:** *Vertical cross section at  $t=84$ . Up : Density distribution. Down : vertical velocity distribution. The phase lines of the waves are visible in the upper layer just above the interface at a radial position  $r \approx 0.8$ . Vertical filaments of positive  $v_z$  in the lower layer are due to convective phenomenon (see 8.29).*

Figures 8.27 and 8.28 also reveal vertical motions in the lower layer corresponding to convection plumes. These plumes result from less dense mixed interfacial fluid that is entrained into the lower layer via Ekman circulation. This interfacial mixing is most likely due to KH instability occurring in some cases locally in the lower layer near the external cylinder. These convective features are confirmed in the vertical cross section of the density distribution focused on high density



**Fig 8.28.:** *Focused view on the waves in the vertical cross section and the corresponding horizontal cross section.*



**Fig 8.29.:** *Convection patterns in the lower layer highlighted by changing density scale.*

concentrations (figure 8.29). The distribution of blobs of positive vertical velocity in the horizontal view (figure 8.26) is also typical of convection. It turns out that convection can also be a mechanism for generating inertia-gravity waves, either by thermal forcing mechanism or by generation due to convective clouds acting like moving obstacles, or even by mechanical oscillator mechanism (Song *et al.*, 2003). Moreover, a similar circular structure of phase lines has been observed in a numerical study on convectively triggered gravity waves (Piani *et al.*, 2000). However, the wavelength of the current radiated waves and their propagation dynamics seems uncorrelated to the periodicity and the dynamics of the convection plumes. Moreover, there are many convection blobs near the internal cylinder while no waves radiation are seen in this area which confirms decorrelation between the two phenomena. Figure 8.29 also reveals that the plumes become broader as they get close to the interface and so we can deduce that they become blurred and too weak to become a wave source. In addition, given the parameters, these convection has not always been seen in the simulations and it must be highlighted that such convection has not been observed in the experiments. On the contrary, the waves apparition and dynamics is correlated to the larger instability dynamics. In this context, the convection phenomenon is likely not responsible for generation of inertia-gravity waves in this case.

Therefore, these waves could be rather emitted because of the variations of the interface slope due to the main Rossby-Kelvin instability. In addition, there could be a complex wave capture phenomenon since the current simulation flow is composed of a large vertical shear and deformation field. It must be noted that the situation is different from previous inertia-gravity waves observations on baroclinic instability (O'sullivan *et al.* Dunkerton (1995); Plougonven *et al.* (2005)) since the current unstable mode is already due to an ageostrophic instability coupling Rossby and Kelvin waves thanks to advection and Doppler-shifting so that the front is not in geostrophic state. Therefore this instability is already an occurrence of spontaneous imbalance and the front is not an unstable baroclinic equilibrated one. Thus further investigations of the wave and the global flow characteristics are necessary to give evidence of wave capture in this simulation based on the complete Navier-Stokes equations and presenting many complex phenomena at the same time.

## 8.5. Conclusion

In this numerical study, the experimental observations of the Rossby-Kelvin instability discussed in section 7 have been confirmed by using the perturbation vector field of the DNS and the structure given by linear stability results (Gula *et al.* (2009b)). The results show the interaction between a Kelvin wave in the lower layer and a Rossby wave in the upper layer. On top of the unstable Rossby-Kelvin modes, inertia-gravity waves were observed. Using axisymmetric simulations for a Schmidt number of 700, the theory of Hölmböe instability is

---

verified for smooth density and velocity profiles. Mechanisms for the generation of inertia-gravity waves on the unstable Rossby-Kelvin mode has been reviewed. Classical adjustment, lighthill radiation or convection has been rejected leaving the hypothesis of emission due to variations of the interface slope because of the Rossby-Kelvin instability as the most probable origin of these waves with possible additional wave capture phenomenon compatible with the high vertical shear. Ongoing simulations will enable us to investigate the variation of the phase speed and wave length of these waves as a function of flow parameters such as  $Ro$  and  $Bu$  number, such as to trace the underlying mechanism.



## 9. Intersection d'un front d'un bicouche en rotation avec une limite horizontale

Ce chapitre présente des résultats expérimentaux et numériques préliminaires sur la dynamique et les instabilités d'un front qui vient intersecter une barrière horizontale (soit le disque, soit le fond de la cuve).

### 9.1. Introduction

Dans les écoulements géophysiques, on appelle un front 'outcropping' un front océanique où le front d'un courant côtier intersecte la surface libre, ou bien un front 'incropping' dans le cas de l'atmosphère lorsque l'interface de densité intersecte la surface continentale. Ces fronts sont très courants, et leur dynamique diffère des fronts étudiés dans le chapitre 7 de par la présence de frottement à la surface horizontale pouvant interagir avec le front et la possibilité de pompage d'Ekman. En outre, l'endroit de l'intersection est un point singulier (épaisseur nulle) où d'autres instabilités peuvent naître.



**Fig 9.1.:** *Front atmosphérique touchant la surface terrestre.*

Expérimentalement des expériences de fronts ont été réalisées dans le cas de courant côtiers, de fronts couplés ou d'upwelling (Griffiths et Linden (1981a,b); Griffiths et Linden (1982); Chia *et al.* (1982); Linden et van Heijst (1984) notamment par des expériences d'ajustement (Bouruet-Aubertot et Linden (2002); Bouruet-Aubertot et Echevin (2002), Holford (1994); Thivolle-Cazat (2003)) et ces expériences mettent en évidence une instabilité de grande longueur d'onde

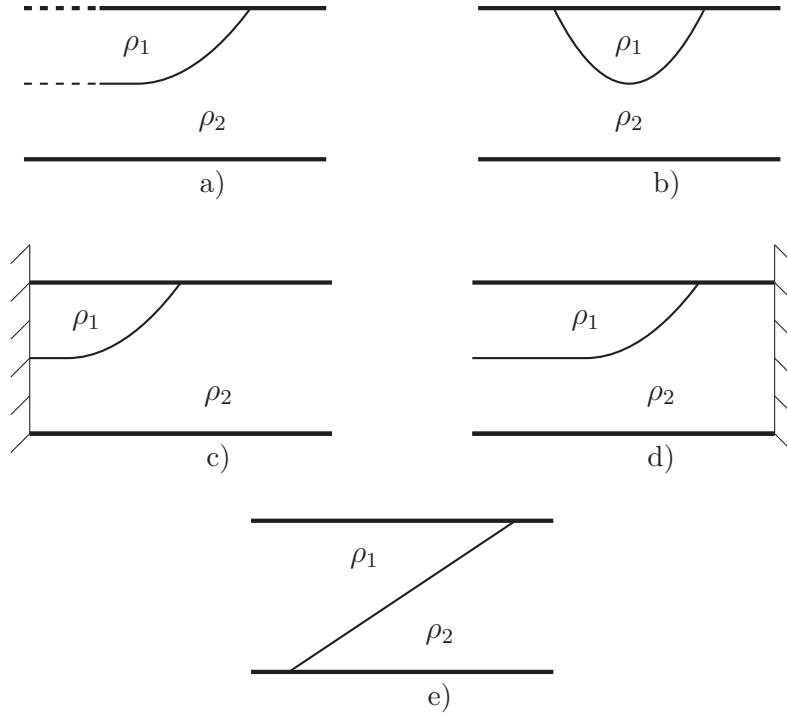
de type barocline. La stabilité des fronts en ‘outcropping’ a aussi été étudiée par plusieurs études analytiques ou numériques (Kubokawa, 1988; Killworth et Stern, 1982; Killworth *et al.*, 1984; Narimousa et Maxworthy, 1987; Barth, 1989a,b; Paldor et Ghil, 1990, 1991).

Dans une étude analytique quasi-géostrophique en canal rectiligne, Hart (1974) suggère un caractère mixte barocline-barotrope lorsque les épaisseurs des deux couches de fluide diffèrent. (voir aussi Flierl (1988)). Killworth (1980) montre aussi que la nature de l’instabilité est notamment contrôlée par le rapport entre les deux épaisseurs des couches de fluide et que le caractère barotrope domine quand la couche supérieure devient beaucoup plus petite que la couche inférieure. Cependant les instabilités observées dans ces études sont comparées essentiellement à l’instabilité barocline ou barotrope et étudiées dans un cadre quasi-géostrophique pour lequel les perturbations à l’interface sont petites et l’échelle horizontale du même ordre de grandeur que le rayon de déformation. Or dans le cas de situation d’in-outcropping, quand l’interface n’est pas horizontale et que le nombre de Rossby n’est plus petit, on peut s’attendre à des effets agéostrophiques.

D’autres modèles alternatifs ont été proposés pour tenir compte d’effets agéostrophiques : le modèle géostrophique frontal pour lequel les perturbations de l’interface sont pris de l’ordre de grandeur de l’épaisseur de la couche (Cushman-Roisin, 1986) ou le modèle semi-géostrophique permettant la prise en compte d’ondes de Kelvin mais pas des ondes inertie-gravité.

Killworth *et al.* (1984) a montré qu’un front isolé (loin d’un bord (voir figure 9.2 a)) est instable quelque soit la distribution de vorticité potentielle (et donc hors du cadre des critères d’instabilité classiques de Charney ou de Rayleigh-kuo). Deux types d’instabilités ont été trouvées pour des vorticités potentielles uniformes : une instabilité non dispersive de grande longueur d’onde et une instabilité décrite de type baroclinique/barotrope et dispersive. A l’aide du modèle en eau peu profonde à deux couches permettant tout type d’ondes, une étude de stabilité de Gula et Zeitlin 2010; Gula *et al.* 2010 dans le cas d’un courant côtier (voir figure 9.2 c)) barotropiquement stable retrouve cette dernière instabilité et montre qu’elle est en fait une résonance barocline entre un mode frontal (onde piégée sur le front de densité) dans la couche supérieure et un mode de Rossby dans la couche inférieure et cette instabilité Rossby-Frontal (‘RF’) peut être confondue avec l’instabilité barocline classique ou est appelée instabilité mixte barotrope/barocline du fait de ses caractéristiques énergétiques. En effet l’onde frontale a des propriétés proches des ondes de Rossby pour des nombres d’ondes petits et des propriétés d’ondes de gravité pour des nombres d’ondes grands. Aussi, il est parfois appelé onde mixte Rossby-gravité (Iga, 1993). Ce type d’instabilité est aussi présente dans le cas de fronts de type d’‘upwelling’ (Barth (1989a,b)) . D’autres instabilités sont trouvées possibles comme l’instabilité Rossby-Poincaré couplant des modes de Rossby dans la couche du bas et des modes de Poincaré dans la couche supérieure ainsi qu’une instabilité ‘PF’ ou





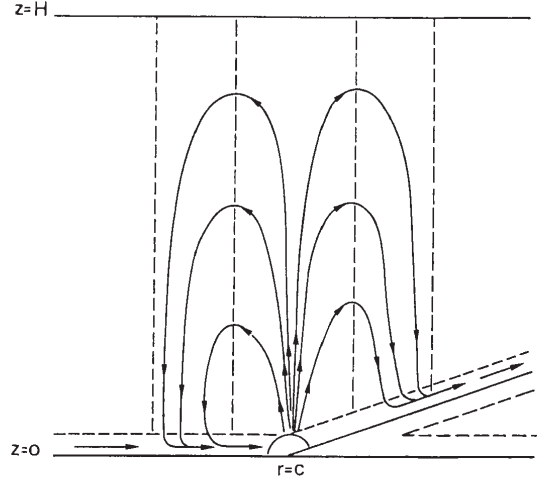
**Fig 9.2.:** Quatre situations différentes d'outcropping pour un fluide bi-couche : a) front isolé, b) fronts couplés rectilignes ou lentille de fluide (fluide confiné à l'intérieur de la surface isopycnale), c) courant côtier, d) front de type 'upwelling', e) situation frontale avec un front dans chaque couche.

'PP' couplant une onde de Poincaré dans la couche du bas avec une onde frontale ou une onde de Poincaré dans la couche du haut et aux propriétés similaires à une instabilité de cisaillement de type Kelvin-Helmholtz (Paldor et Ghil (1990, 1991)). Si de plus l'écoulement dans la couche supérieure est barotropequement instable, une instabilité 'KF' résonance barotrope entre une onde frontale et une onde de Kelvin dans cette couche domine l'écoulement ( voir aussi Kubokawa (1986)). La situation considérée par Orlanski (1968) (voir 9.2 e)) où deux fronts existent chacun dans des couches différentes du fait de l'intersection de l'interface à la fois en haut en bas (contrairement aux fronts couplés qui ne concernent qu'une seule couche), ajoute encore une autre instabilité possible (en plus des Rossby-Rossby, Rossby-Frontal, Rossby-Poincaré, Kelvin-Frontal ) couplant barocliniquement deux modes frontaux. De même dans le cas de fronts couplés, l'instabilité mise en évidence par Griffiths *et al.* (1982) résulte de la résonance barotrope de deux modes frontaux se propageant sur chacun des fronts et dont l'évolution non-linéaire peut amener une reconnection des fronts de densité et à la formation de tourbillons quasiment indépendants (Scherer et Zeitlin, 2008).

Au vu des résultats obtenus dans le cas sans intersection avec une limite horizontale au chapitre 7, on souhaite explorer expérimentalement et numériquement

des situations d'in/outcropping afin d'explorer ces instabilités agéostrophiques de type Rossby-Frontal, Poincaré-Frontal ou Kelvin-Frontal.

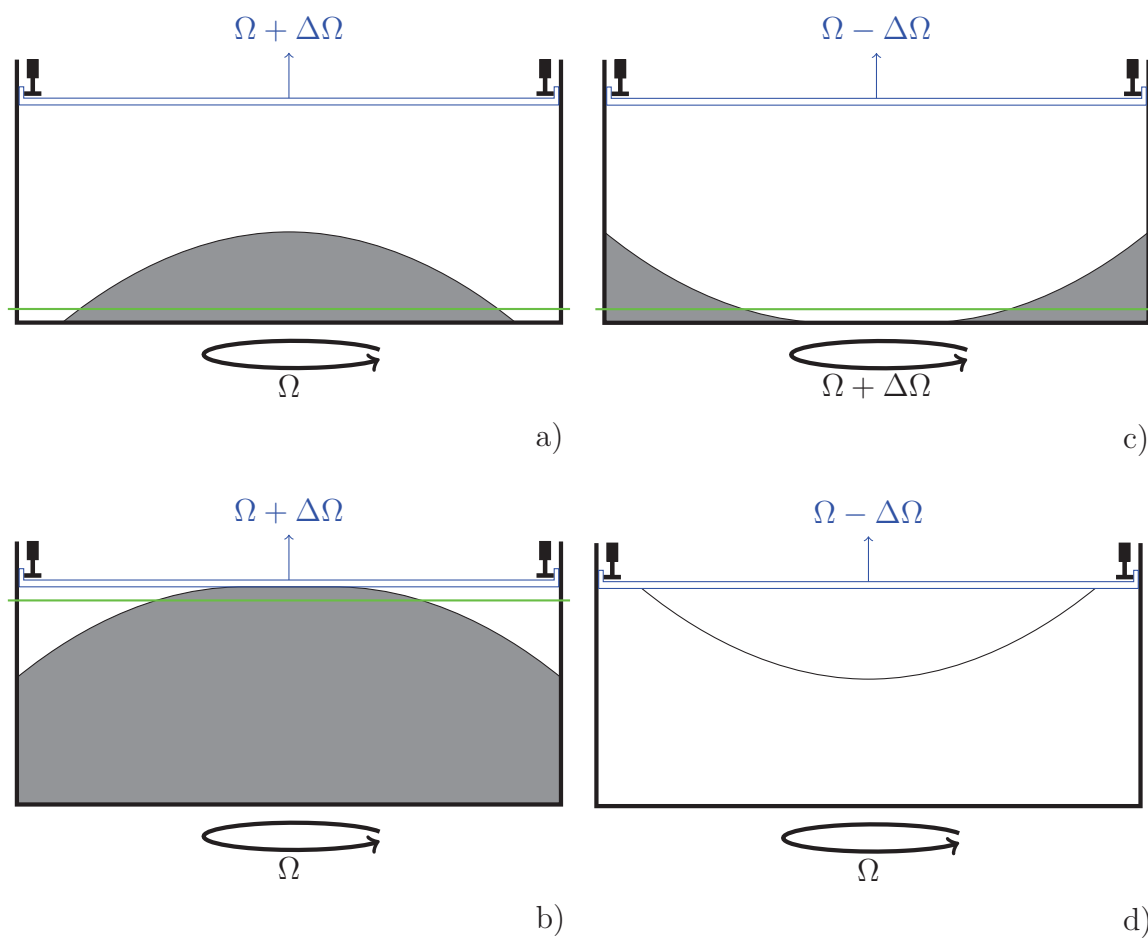
En outre, la structure des couches d'Ekman et de Stewartson internes a été étudiée analytiquement pour une configuration annulaire par [van Heijst \(1984\)](#) qui a montré la présence de couches de Stewartson internes détachées à faible nombre de Rossby permettant une circulation vers le haut au niveau du front (figure 9.3). On vérifiera si ces propriétés sont modifiées pour des nombres de Rossby plus grands et comment les couches d'Ekman interagissent-elles avec le front et modifient les instabilités.



**Fig 9.3.:** *Circulation secondaire en présence de couches de Stewartson détachées pour un système bicouche en rotation avec un système de source et puits au niveau respectivement des murs intérieur et extérieur de l'anneau tournant. Extrait de [van Heijst \(1984\)](#).*

## 9.2. Configuration expérimentale et numérique

Pour cette étude, les expériences ont été réalisées dans la configuration cylindrique présentée au chapitre 5. Les nombres sans dimension qui contrôlent le système sont très similaires à ceux présentés au chapitre 2. Cependant afin d'obtenir une intersection du front avec le disque ou le fond de la cuve, les épaisseurs des deux couches seront prises différentes. Cela introduit un nouveau nombre dans le système  $\delta = \frac{H_1}{H_2}$  où  $H_1$  et  $H_2$  sont respectivement les épaisseurs de la couche supérieure et de la couche inférieure. En outre, le nombre de Burger que l'on va utiliser va s'écrire  $Bu = \frac{g' H_{\text{red}}}{4\Omega^2 R}$  en prenant une hauteur 'réduite' définie par  $H_{\text{red}} = \frac{2H_1 H_2}{H_1 + H_2}$  et  $R$  le rayon du cylindre.



**Fig 9.4.:** Situations de fronts en situation d'incropping ou d'outcropping. La couche de couleur blanche correspond à la couche dans laquelle de la rhodamine (colorant fluorescent) est introduite contrairement à la couche grisée sans colorant.

Les quatre situations de fronts en in/outcropping possibles sont illustrées figure 9.4. La situation d) ne sera pas étudiée ici. La situation a) est un cas de front en incropping avec lentille de fluide (et est l'équivalent de la situation d) en inversé) tandis que le cas b) correspond à un front de type courant côtier de même que c). Les paramètres permettant une situation d'in/outcropping sont estimés en s'appuyant sur la formule théorique de l'équation de l'interface de type parabolique :

$$h(r) = (H_2 - \frac{A}{2}R^2) + Ar^2 \quad \text{avec} \quad A = \frac{2\Omega^2}{g'}(Ro_2 - Ro_1) + \frac{\Omega^2}{2g} + \frac{\Omega^2(Ro_2^2 - Ro_1^2)}{2g'} \quad (9.1)$$

où le premier terme est le terme linéaire, le deuxième le terme centrifuge externe, le troisième le terme non-linéaire (Bradford *et al.*, 1981) et les  $Ro_i$  sont des Rossby associés à chaque couche  $Ro_i = \frac{\Delta\Omega_i}{2\Omega}$  et dont la valeur est une fraction du Rossby usuel  $Ro = \frac{\Delta\Omega}{2\Omega}$ .

Case	Grid resolution ( $N_\theta \times N_r \times N_z$ )	$H_1$ [cm]	$H_2$ [cm]	$\delta$	$g'$ ( $m^2 s^{-1}$ )	$\Omega$ (rad/s)	$\Delta\Omega$ (rad/s)	Ro	Bu	Re	Sc
cyl1	$257 \times 97 \times 257$	20	7	2.86	0.089	0.558	-0.28	-0.251	0.0343	1500	20
cyl2	$257 \times 97 \times 257$	5	20	0.25	0.08912	0.29	0.222	0.383	0.0980	1500	20
cyl3	$257 \times 97 \times 257$	20	5	4	0.0734	0.729	-0.448	-0.800	0.0866	1500	20
cyl4	$257 \times 97 \times 257$	5	15	0.33	0.0685	0.484	0.32	0.331	0.0254	1500	20
cyl5	$257 \times 97 \times 257$	15	5	0.33	0.0685	0.484	0.32	0.331	0.0254	1500	20

**Table 9.1.:** *Caractéristiques des simulations numériques.*

Pour chaque type de configuration d'intersection de front, des simulations numériques directes ont été réalisées avec les mêmes paramètres qu'une expérience typique avec un code élaboré par Verzicco *et al.* (1997) similaire à celui utilisé au chapitre 8 mais en configuration cylindrique. Le tableau 9.1 présente les caractéristiques des différentes simulations numériques réalisées.

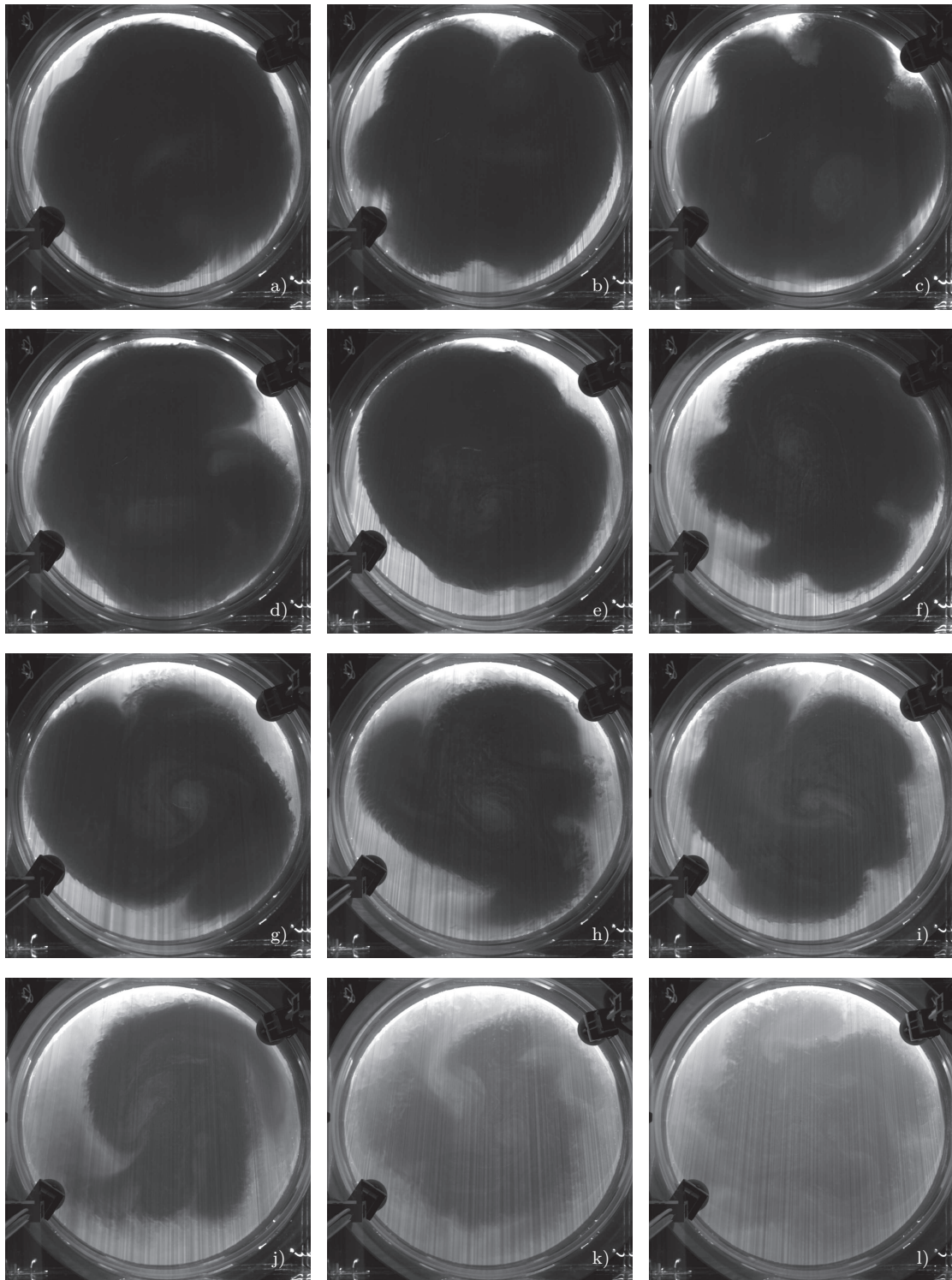
## 9.3. Premiers résultats

### 9.3.1. Cas a) intersection via les côtés de l'interface parabolique.

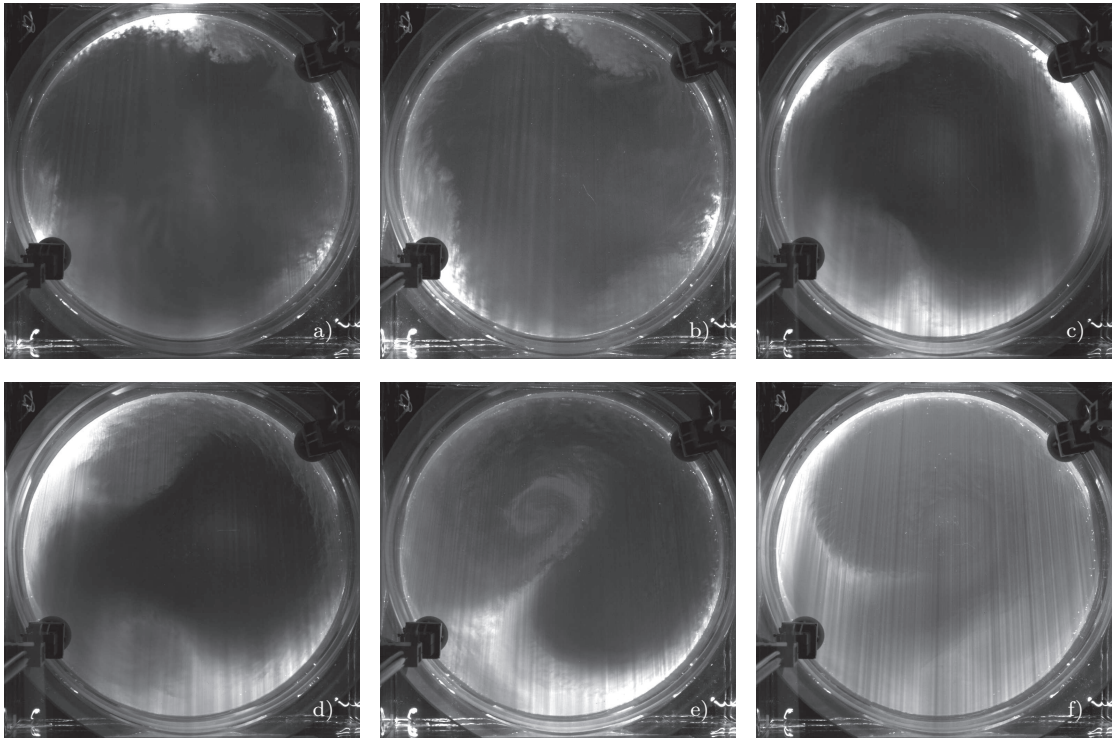
La figure 9.5 montre une instabilité de grande échelle présentant des tourbillons cycloniques intenses et des nombres d'ondes entre 2 et 4. Les valeurs du nombre de Burger sont inférieures à 0.2 et correspondent au domaine de l'instabilité barocline dans le diagramme Ro-Bu (figure 8.2) vu en section 8. L'aspect distordu du front et l'intensification des cyclones ont été observés de façon similaire par Chia *et al.* (1982), Bouruet-Aubertot et Linden (2002) et Bouruet-Aubertot et Echevin (2002) lors d'expériences d'ajustement et interprétés comme un effet côtier (Bouruet-Aubertot et Linden, 2002). On retrouve

aussi ces cyclones intenses numériquement (figure 9.7). Ce phénomène est d'autant plus grand que la largeur horizontale du courant caractérisant la proximité du front du mur vertical est petite. Ici le front vient visiblement toucher complètement les parois verticales et induit dans le référentiel du front une déstabilisation via des cyclones très intenses plus que l'instabilité simple de l'anticyclone central.

En outre, des petites perturbations due à des instabilités de cisaillement sont présentes partout sur le front et une nature barotrope de l'instabilité n'est pas exclue. Cependant, seule la structure des champs de vitesse pourrait permettre de connaître finement la ou les résonances simultanées responsables des modes instables visibles ici (une simulation numérique associée est en cours de réalisation). Les cyclones intenses mènent finalement à un mélange très rapide des deux couches près des murs surtout si le Rossby est grand : dans la figure 9.6 on peut voir un mode 3 avec des tourbillons mélangeant très rapidement la fine couche du bas.

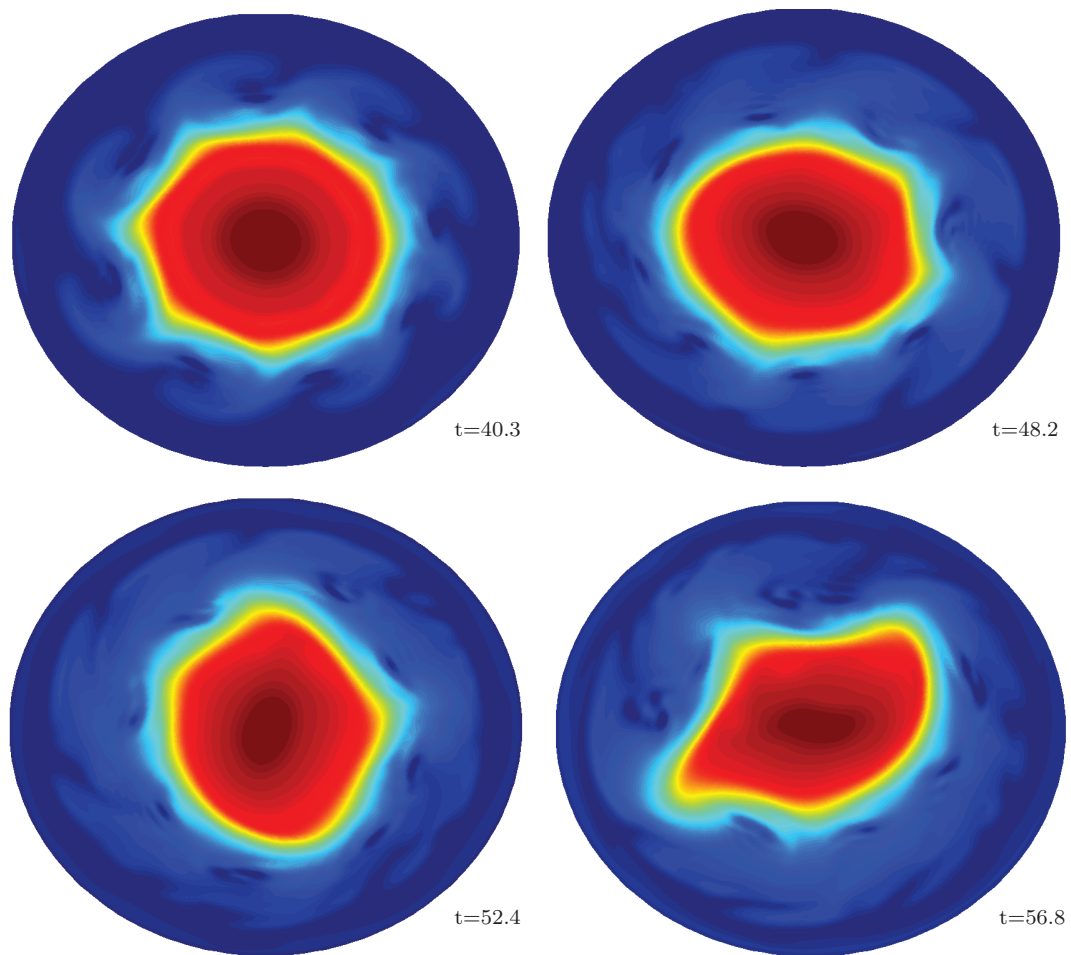


**Fig 9.5.:**  $Ro=0.54$ ,  $Bu=0.041$ ,  $g'=0.112$ ,  $H_1=15$  cm,  $H_2=5$  cm.



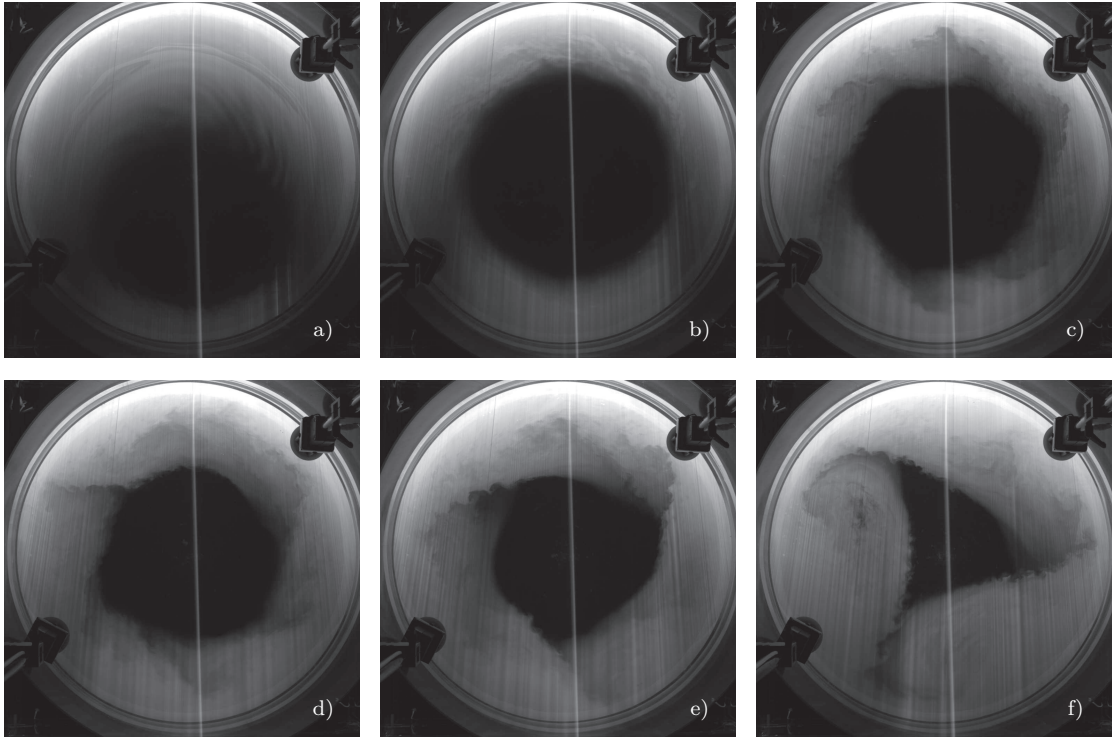
**Fig 9.6.:**  $Ro=2.5$ ,  $Bu=0.503$ ,  $g'=0.522$ ,  $H_1=15$  cm,  $H_2=5$  cm.





**Fig 9.7.:** *Vue de dessus du front avec les contours de densité (coupe dans la couche du dessous près du fond) pour la simulation numérique cyl5.*

### 9.3.2. Cas b) : intersection du sommet de l'interface avec le disque.



**Fig 9.8.:**  $Ro=1.77$ ,  $Bu=0.26$ ,  $g'=0.270$ ,  $H_1=5.5$  cm,  $H_2=14.5$  cm.

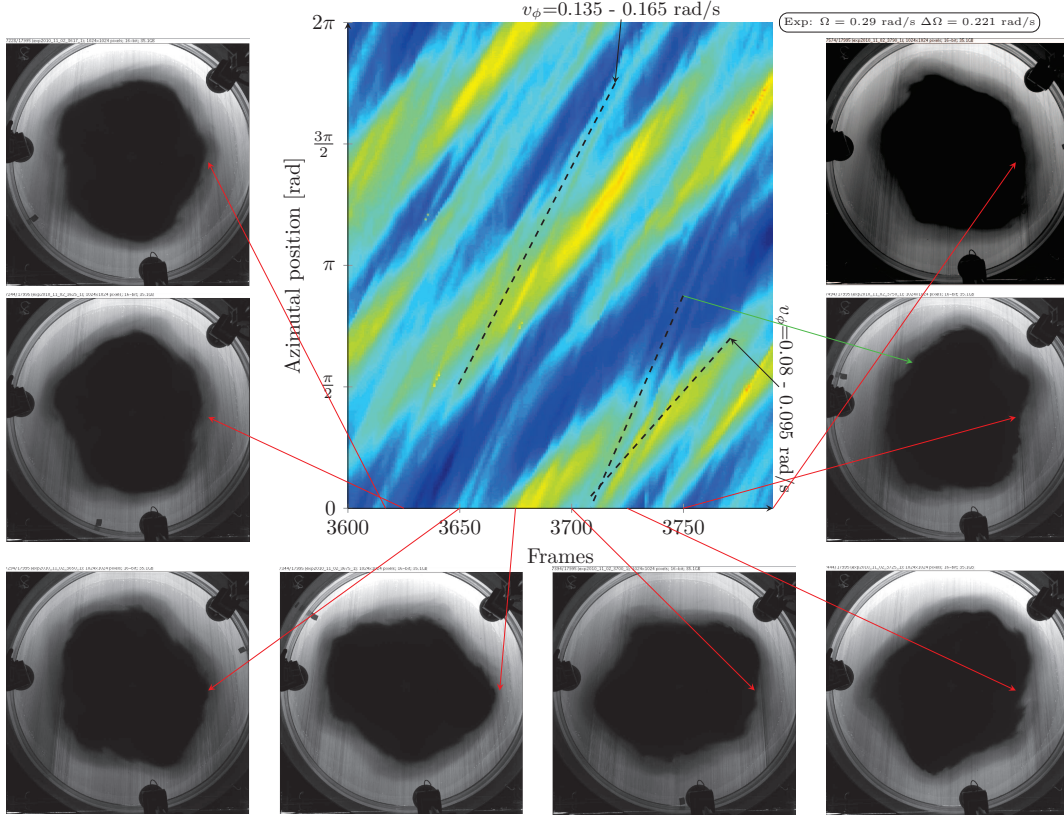
La figure 9.8 montre une instabilité présentant des modes 6,4 et 3 et pour des Rossby plus petits (figure 9.9) on observe une superposition de modes avec un mode 6 et un mode 2 dominant de type barocline. Cette richesse de modes est confirmée par le diagramme de Hövmüller où des crêtes de diverses pentes révèlent des ondes de différentes vitesses de phases.

Pour des Rossby élevés, des tourbillons et des effets non linéaires mélangent rapidement l'interface et l'on peut distinguer une instabilité de cisaillement secondaire de type Kelvin-Helmholtz sur le front du tourbillon figure 9.10 g) et figure 9.8 d) e) f).

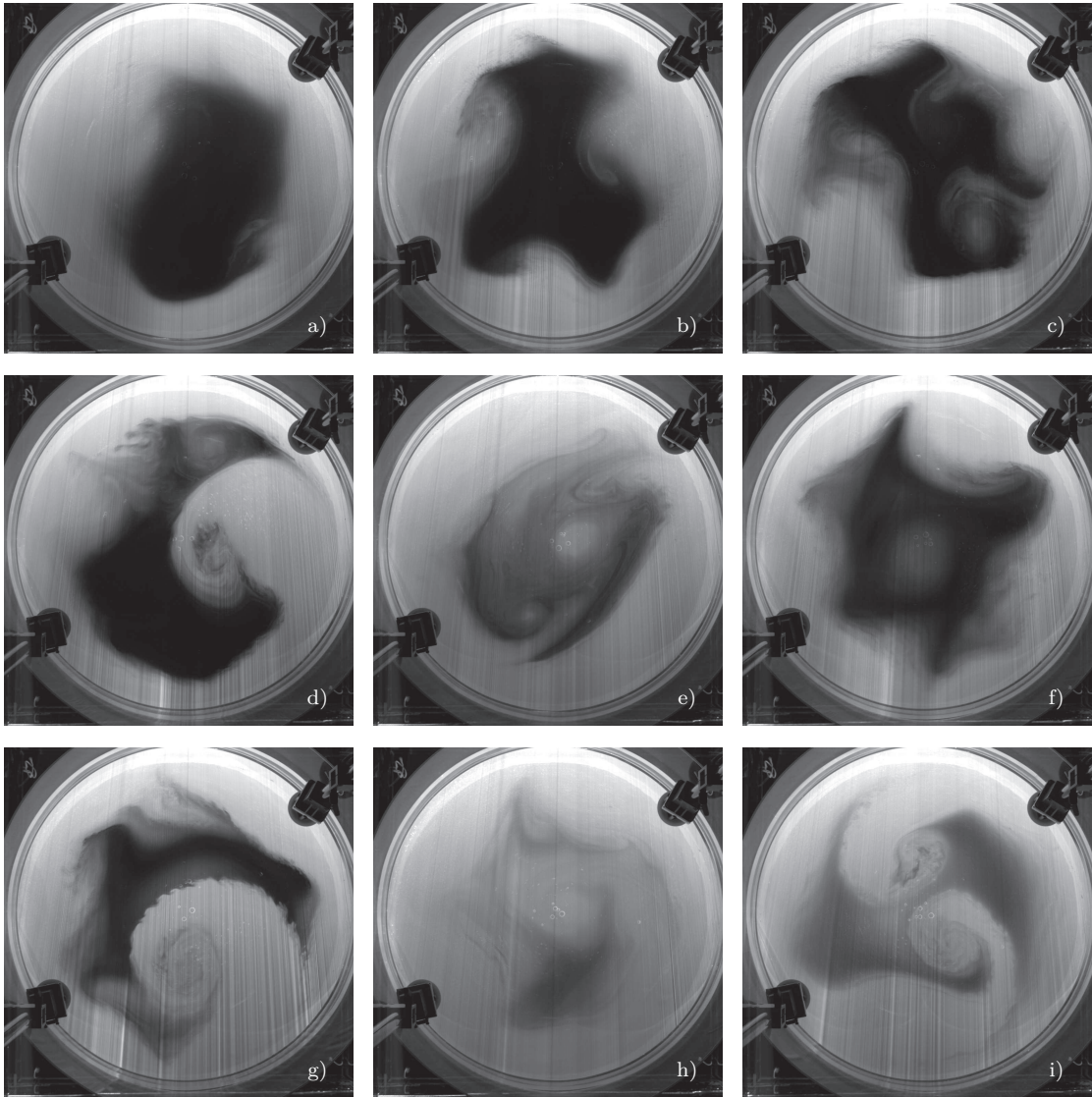
Pour des paramètres analogues à l'expérience illustrée figure 9.9, la simulation *cyl2* montre des modes 3, 6 et même supérieurs au début de la simulation de façon similaire (figure 9.11) et révèle une structure de type Kelvin dans la couche inférieure et de type Rossby dans la couche supérieure dans les champs de perturbations de vitesse figure 9.12. Le caractère tourbillonnaire fortement prononcé avec un centre bien développé des anticyclones et cyclones permet de discriminer entre une onde de Rossby et une onde frontale (onde ressemblant à une onde de gravité attachée à la ligne de front de densité et pouvant avoir un

caractère de Rossby pour des nombres d'onde faibles). On peut donc suggérer que c'est une instabilité de type Rossby-Kelvin.

Pour les paramètres de la simulation *cyl4*, de plus petites longueurs d'ondes sont observées (figure 9.13) suggérant un possible mode frontal aux caractéristiques d'ondes de gravité à ce temps là et dont le nombre d'onde diminue au fur et à mesure de la simulation.

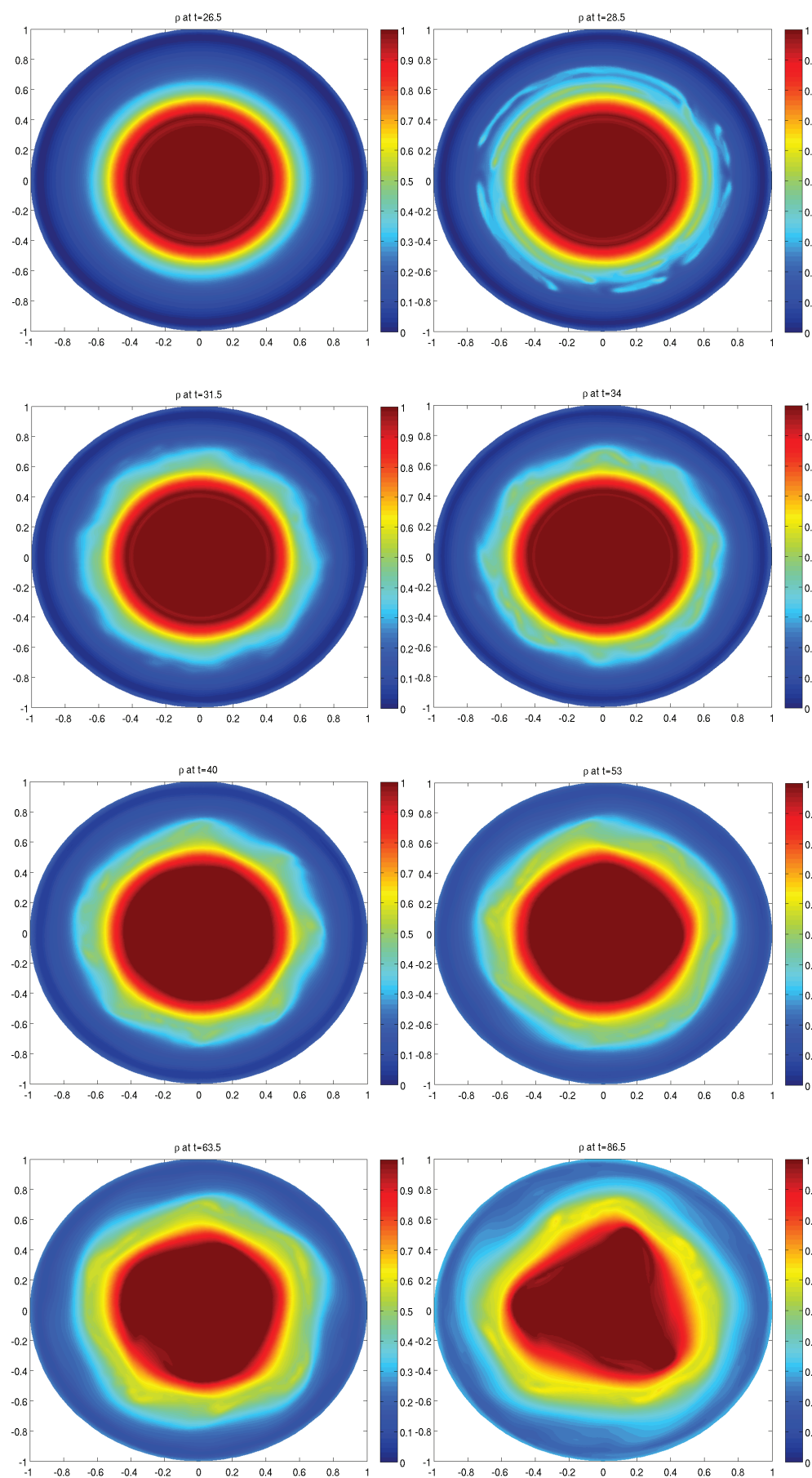


**Fig 9.9.:** *Extrait du diagramme de Hövmüller d'une expérience avec les paramètres :  $Ro=0.39$ ,  $Bu=0.083$ ,  $g'=0.070$ ,  $H_1=5$  cm,  $H_2=20$  cm analogue à la simulation numérique *cyl2*. Les flèches pointent vers le front à la position  $\theta = 0$ .*

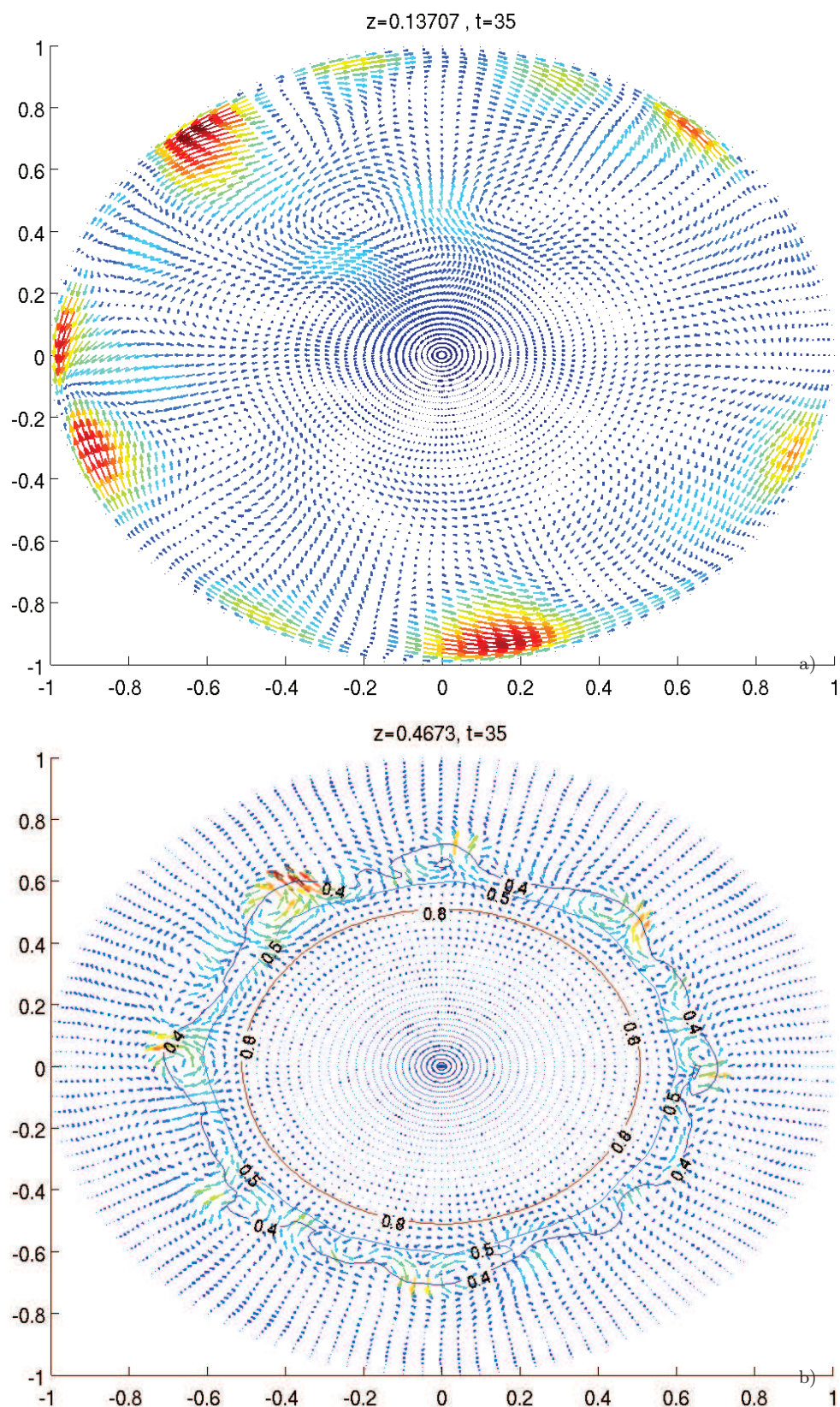


**Fig 9.10.:**  $Ro=0.34$ ,  $Bu=0.0191$ ,  $g'=0.134$ ,  $H_1=5$  cm,  $H_2=15$  cm.





**Fig 9.11.:** *Vue de dessus du front avec les contours de densité (coupe dans la couche du dessus) pour la simulation numérique cyl2.*



**Fig 9.12.:** Perturbation du champ de vitesse à  $t=35$  a) dans la couche du dessous b) dans la couche du dessus (simulation cyl2). Les lignes pleines représentent des contours choisis de la densité permettant la visualisation de la ligne singulière de densité.



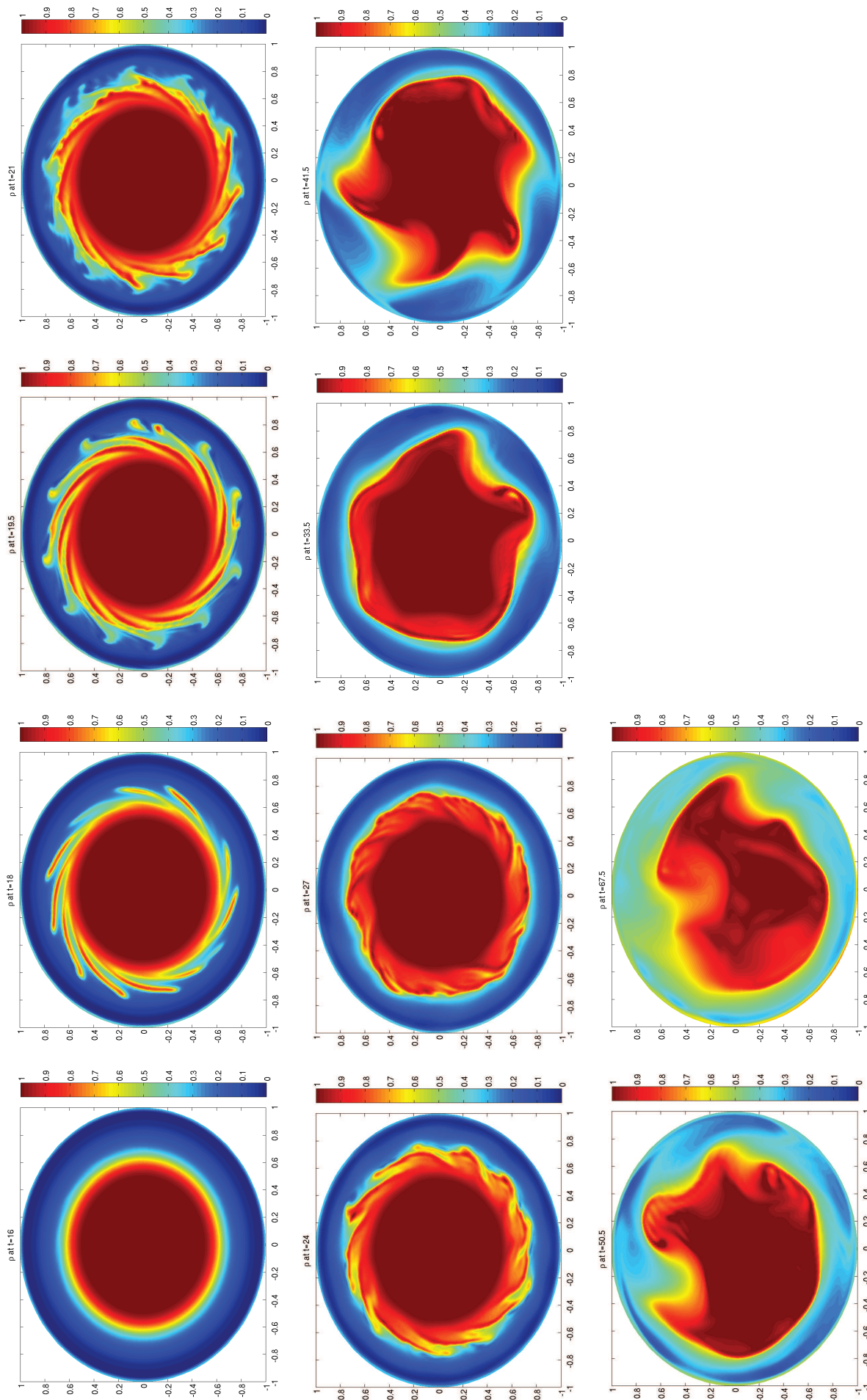
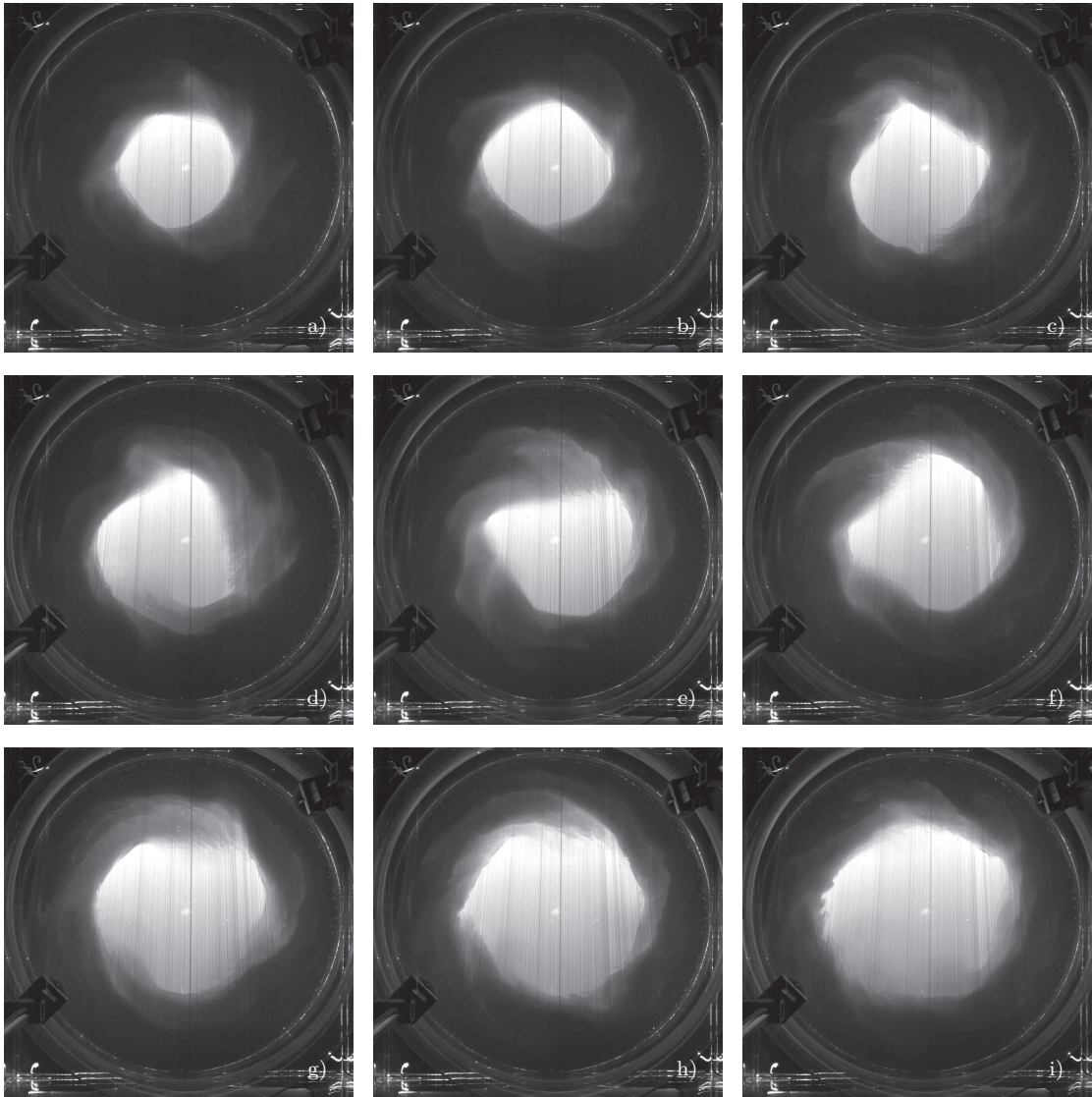


Fig 9.13.: Vue de dessus du front avec les contours de densité (coupe dans la couche du dessus) pour la simulation numérique cyl4.



### 9.3.3. Cas c) : intersection du sommet de l'interface avec le fond.

La figure 9.14 montre une instabilité dès l'apparition du spot lorsque l'interface parabolique touche le fond avec des nombres d'ondes de 3, 4 et surtout 6. La nature exacte de l'instabilité n'est pas encore établie ici. On observe aussi des 'bras' de densité intermédiaire en gris clair prolongeant chacune des crêtes de l'instabilité et de petites structures sont visibles sur le front qui n'est jamais net. On retrouve ces caractéristiques dans les vues de dessus d'une coupe des contours de densité du front de la simulation cyl1 (figure 9.15).



**Fig 9.14.:**  $Ro=-0.208$ ,  $Bu=0.025$ ,  $g'=0.064$ ,  $H_1=20$  cm,  $H_2=5$  cm.

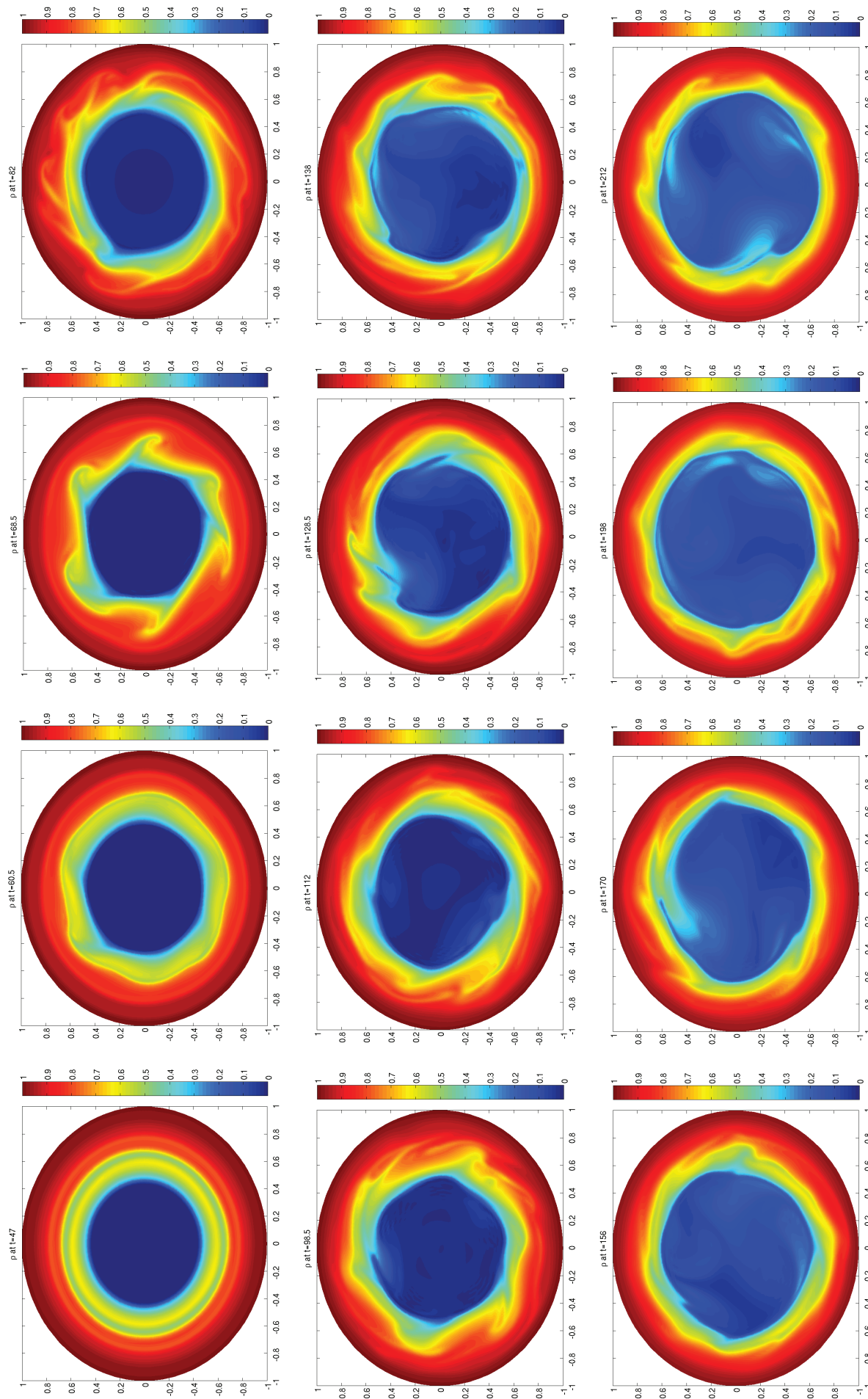


Fig 9.15.: Vue de dessus du front avec les contours de densité (coupe horizontale près du fond) pour la simulation numérique cyl1

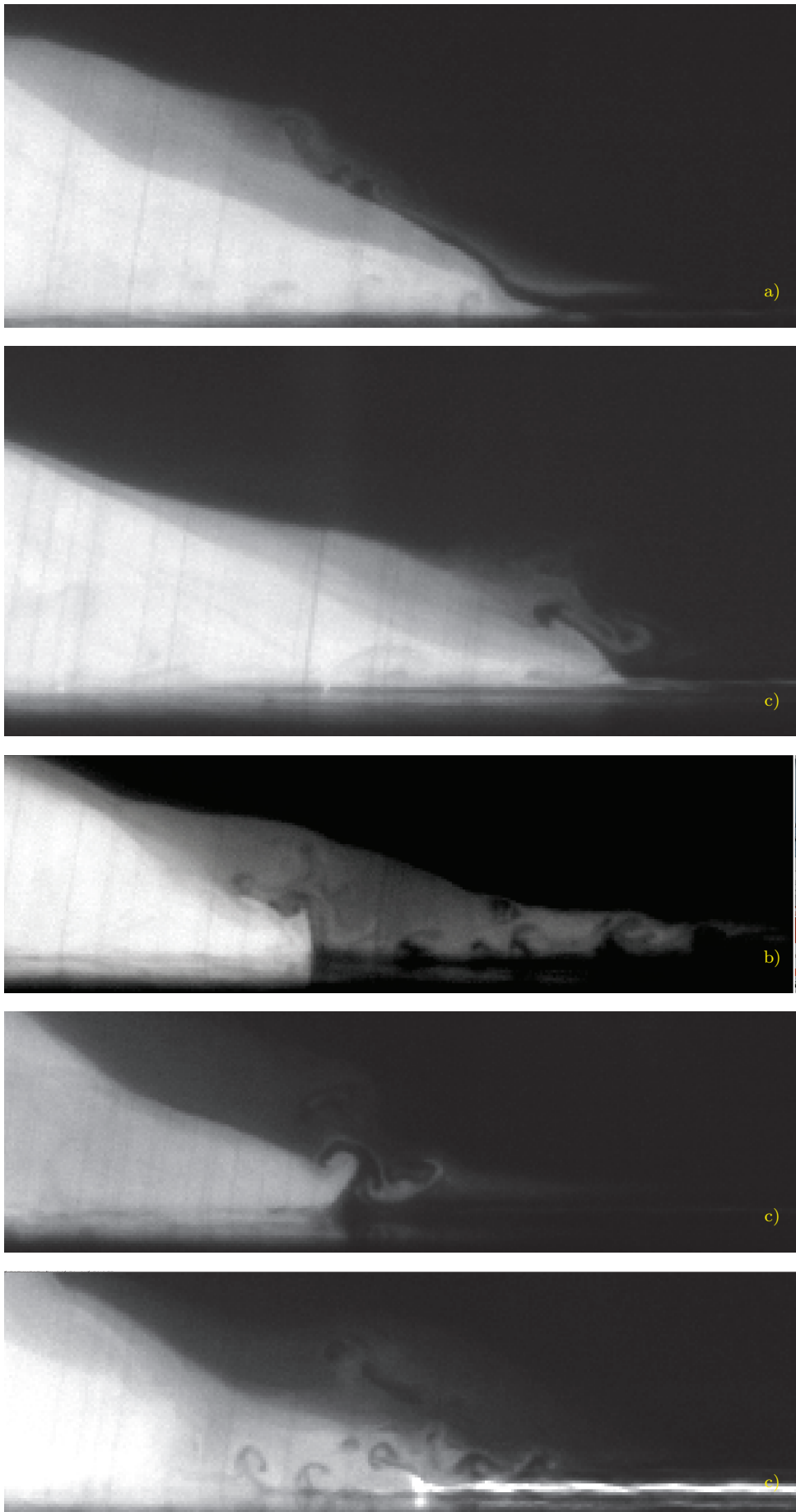
## 9.4. Dynamique latérale des fronts in/outcropping.

L'évolution du front dépend ici non seulement des différentes instabilités possibles par résonance d'ondes mais aussi de la circulation méridionale et des interactions du front avec les couches d'Ekman.

Trois cas peuvent être observés selon le transport du fluide moins dense (plus dense) pour un front en incropping (outcropping) au niveau de la ligne singulière du front.

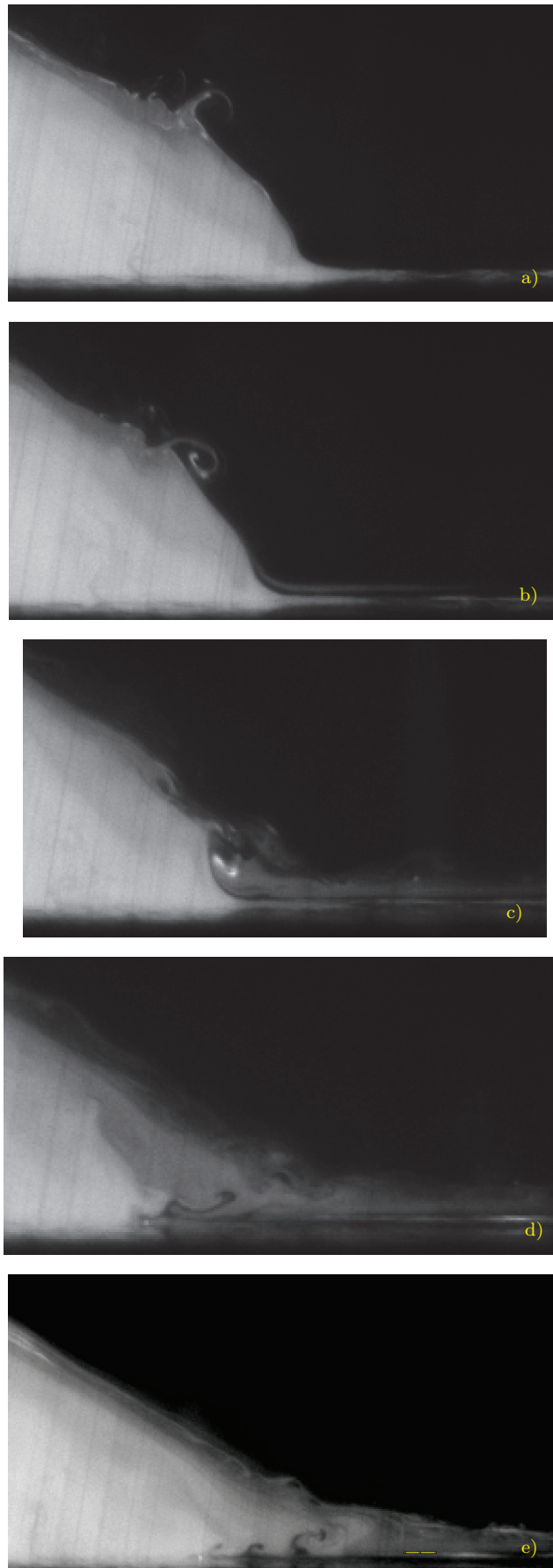
- Les résultats de [van Heijst \(1984\)](#) montrent que le fluide peut être bloqué par des colonnes de Taylor et conduire à une circulation verticale du fluide moins dense au niveau du nez du front (figure 9.3) et l'établissement de couches de Stewartson détachées.
- Le fluide moins dense peut aussi continuer à être transporté dans la couche d'Ekman et conduire à la création de plumes convectives. Des expériences d'incropping avec du colorant et une caméra en vue de côté révèlent la présence de ces plumes convectives de petites échelles partant de la couche d'Ekman à l'intérieur de la couche inférieure (figure 9.16). Cela génère du mélange au niveau du nez du front et modifie la stratification au niveau de l'interface avec la création d'une couche supplémentaire à l'interface (colorée en gris clair). Ces plumes convectives sont aussi visibles numériquement (figure 9.19 et figure 9.18 à  $t=23.5$  et  $t=25$ ). Dans le cas d'un front en outcropping, des intrusions du fluide plus dense dans la couche supérieure génèrent aussi des plumes convectives descendantes (figure 9.21).
- Le fluide moins dense peut aussi être transporté au dessus du front radialement vers l'extérieur. Cela est visible dans la figure 9.17 où l'on voit aussi des déferlements non-linéaires d'ondes au niveau de l'interface entre les deux couches bien reproduits par la simulation *cyl3* (9.18 à  $t=23.5$  et  $t=25$ ).

Les différentes situations dépendent de la pente de l'interface contrôlée par le nombre de Rossby et le nombre de Burger. La figure 9.20 montre un front en outcropping s'approchant de la structure de [van Heijst \(1984\)](#) avec une séparation de la structure secondaire de l'écoulement entre un coeur intérieur défini dont les propriétés ont une faible dépendance en  $z$  et que l'on peut considérer en état quasi-géostrophique et les zones externes en dehors de la zone de contact très instables. C'est le cas aussi du front incropping de la figure 9.18 à  $t=63$ . La figure 9.18 montre les lignes de courant durant la formation d'un front en incropping avec un front qui devient de plus en plus raide et qui présente à la fois une intrusion et la création d'une plume convective, la création de la double couche et la mise en rotation finale du fluide du coin ramenant le fluide dense vers le centre.



**Fig 9.16.:**  $Ro=-0.41$ ,  $Bu=0.024$ ,  $g'=0.049$ ,  $H_1=18.9cm$ ,  $H_2=6.5cm$ .





**Fig 9.17.:** Déferlement d'ondes de type Kelvin Helmholtz au niveau de l'interface (Même expérience que 9.16).

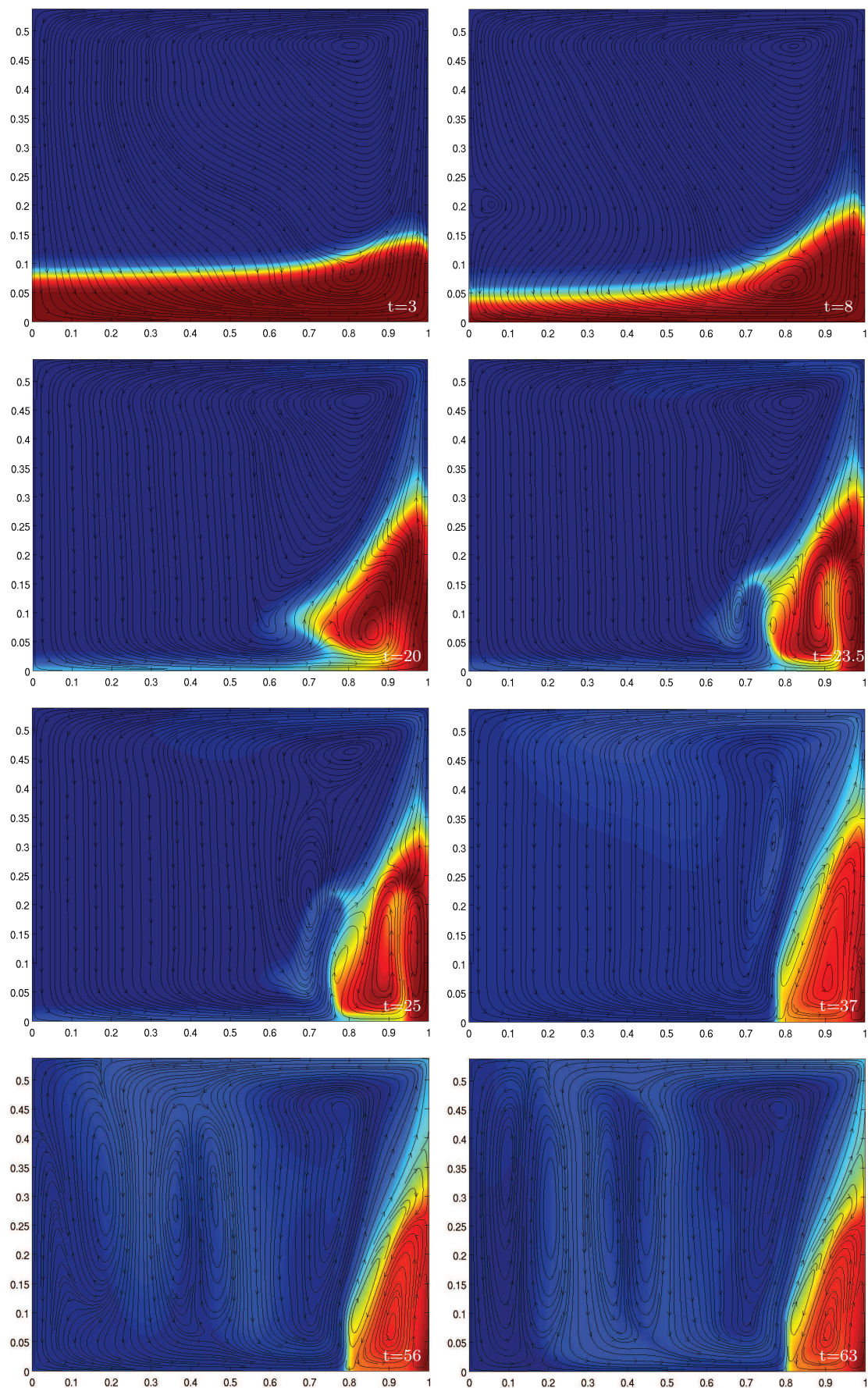
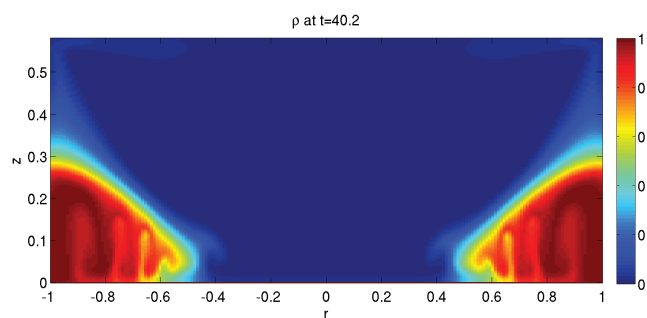
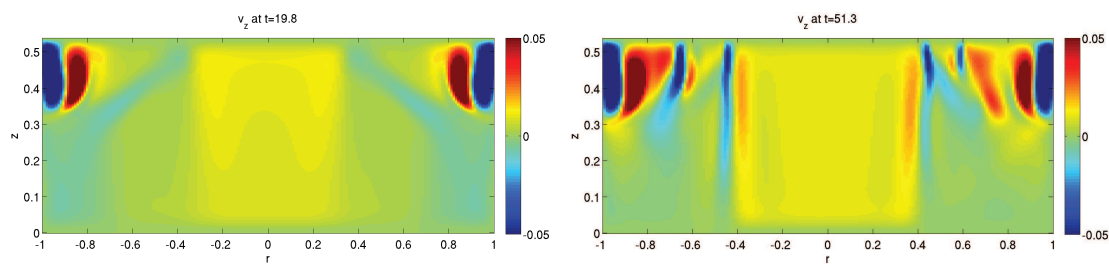


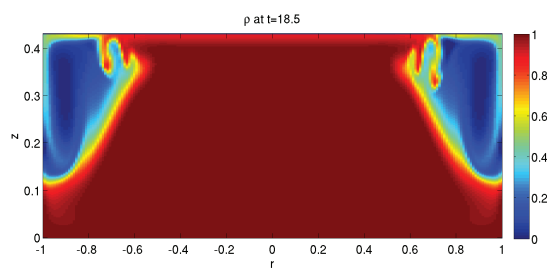
Fig 9.18.: Ligne de courant et contours de densité dans le plan  $r$ - $z$  pour la simulation *cyl3*.



**Fig 9.19.:** *Vue de côté pour la simulation cyl1 à  $t=40.2$  : contours de vitesse verticale*



**Fig 9.20.:** *Vue de côté (simulation numérique cyl2 à  $t=19.8$  et  $t=51.3$ ) : contours de vitesse verticale.*



**Fig 9.21.:** *Vue de côté de la simulation cyl4 à  $t=18.5$  : contours de la densité.*



## 9.5. Conclusion

Des résultats préliminaires ont été exposés dans le cas de fronts côtiers ou de fronts couplés. Dans le cas de fronts couplés, on observe des perturbations de grande échelle probablement baroclines. On interprète la distortion du front et la présence de cyclones intenses par la proximité du front des murs verticaux. L'étude de fronts côtiers dans le cas d'outcropping montre une superposition d'un mode principalement 6 et d'un mode barocline 2. Les simulations numériques suggèrent que le mode 6 peut être interprété dans une première approche comme une instabilité Rossby-Kelvin d'après les structures des perturbations en champ de vitesse. Pour l'ensemble des situations d'in/outcropping exposées, des études numériques sont en perspective pour approfondir la nature délicate des instabilités. La structure méridionale et l'interaction du front avec les couches d'Ekman au niveau du point singulier influe aussi sur la dynamique du front et dépend de la pente de l'interface. Dans le cas des fronts en configuration de courant cotiers en incropping, la présence de plumes de convection et de déferlement d'ondes de cisaillement modifient la stratification par mélange au niveau du nez du front et enrichissent encore la dynamique du front déjà supposée très riche du fait des multiples résonances possibles entre les ondes trouvées analytiquement et numériquement (Gula et Zeitlin, 2010; Gula *et al.*, 2010; Scherer et Zeitlin, 2008).

## 10. Conclusion et perspectives

Au cours de cette thèse, une nouvelle modélisation expérimentale de front en rotation a été menée à l'aide d'un système à deux couches et de fluides miscibles.

La dynamique de l'interface et la structure de la circulation secondaire pour un front stable a été étudiée numériquement et a mis en évidence la présence de couches d'Ekman internes avec une structure additionnelle pour des valeurs élevées de nombre de Schmidt et un faible nombre de Rossby. Cette dynamique secondaire est importante car elle influe sur la mise en rotation des couches et le transfert de mouvement vertical.

Une étude combinée expérimentale et numérique a ensuite permis l'exploration des différents régimes instables d'un front en configuration annulaire en terme de nombre de Rossby et de Burger. La mise en évidence expérimentale d'une instabilité agéostrophique couplant des mouvements équilibrés et divergents grâce à la résonance entre une onde de Rossby et une onde de Kelvin a été confirmée numériquement grâce aux structures des perturbations en champs de vitesse dans chaque couche.

Des structures de petite échelle présentes sur le front ont aussi été observées expérimentalement. La discrimination entre deux mécanismes possibles, instabilité de cisaillement de Hölmboë ou ondes inertie-gravité, est rendue possible par l'étude des conditions de l'interface et en particulier les valeurs du nombre de Richardson et du rapport entre les épaisseurs de l'interface en vitesse et en densité. Numériquement, une simulation axisymétrique à nombre de Schmidt 700 confirme la conjecture expérimentale de la présence d'ondes de Hölmboë sur le front. En outre, des ondes inertie-gravité sont observées sur un mode instable Rossby-Kelvin développé dans une simulation 3D avec un nombre de Schmidt 100. Plusieurs mécanismes de génération d'ondes (ajustement géostrophique, radiation de Lighthill, convection) s'avèrent incompatibles avec les caractéristiques de ces ondes (petite longueur d'onde, front établi, décorrélation entre la dynamique des ondes et celle des plumes convectives et production d'ondes non uniforme spatialement) et cela suggère le phénomène de capture d'ondes associé à un champ de déformation important et un fort cisaillement vertical.

La configuration d'un front en in/outcropping est rendue plus complexe de par l'interaction du front avec les couches d'Ekman au fond ou sous le disque et la création d'un point singulier d'épaisseur nulle. La dynamique dépend de deux facteurs : d'un côté la circulation verticale et le mélange présent au nez du front qui modifie l'interface et dépend fortement de l'inclinaison du front et donc du nombre de Burger et du nombre de Rossby, et de l'autre la richesse des différentes résonances d'ondes horizontales et verticales possibles.

Des études numériques en perspective permettront de continuer à explorer la dynamique des interfaces de densité et la circulation d'Ekman et de déterminer les paramètres permettant le développement important d'instabilités associées à d'autres résonances que Rossby-Rossby et Rossby-Kelvin (par exemple Poincaré-Rossby ou Rossby-Frontal pour les fronts en in/outcropping). En outre, on peut élargir l'étude faite ici avec deux couches de fluides miscibles au cas d'une stratification linéaire. L'enjeu est de savoir si l'instabilité agéostrophique Rossby-Kelvin conserve toujours un taux de croissance suffisamment grand par rapport à celui de l'instabilité barocline.

# A. Annexe : Equilibre géostrophique et vent thermique

Si on se place dans le cas d'un fluide en rotation rapide ie  $R_o \ll 1$  et que l'on considère les effets visqueux négligeables ie  $E_k \ll 1$ , on peut simplifier l'équation de Navier Stokes : on développe l'équation à l'ordre zéro en nombre de Rossby  $R_o$  et en  $H/L$  où  $L$  est la distance horizontale typique et  $H$  la hauteur caractéristique et l'équation se simplifie en :

$$\begin{aligned} -fv &= -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p}{\partial x} \\ fu &= -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

si  $\vec{v} = (u, v, w)$ . De façon compacte, on a donc :

$$f\vec{z} \wedge \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}_H p}{\rho_o} \quad (\text{A.2})$$

Il y a ainsi un équilibre entre la force de Coriolis et le gradient de pression horizontal appelé *équilibre géostrophique*. Cela veut dire aussi que le vecteur vitesse est parallèle aux isobares. C'est principalement à partir de cet équilibre de base que sont construits les modèles d'océan et d'atmosphère.

Si en plus, on fait l'approximation hydrostatique pour  $p$  ie

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Alors en dérivant (A.2) par rapport à  $z$  on a :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = -\frac{g}{\rho_o f} \vec{z} \wedge \vec{\nabla}_H \rho \quad (\text{A.3})$$

Cela signifie que si l'on applique un cisaillement vertical, il va exister un gradient de densité horizontal. Cette relation est appelée communément *vent thermique* et est souvent utilisée pour calculer la vitesse du vent à partir de la distribution de densité (souvent due à la température). Elle signifie aussi que les surfaces isodensité se courbent du fait de cet équilibre.

Dans les expériences, c'est le disque qui induit un cisaillement vertical et est donc l'équivalent du vent thermique. La relation d'équilibre géostrophique sous hypothèses géostrophique et hydrostatique s'écrit en se plaçant en cylindrique :

$$-fv_\theta = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p}{\partial r}$$

avec la pression considérée hydrostatique :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

donc la relation du vent thermique s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = -\frac{\rho_o f}{g} \frac{\partial v_\theta}{\partial z}$$

Cela peut permettre de comprendre le sens de courbure de l'interface :

En effet si on a un disque tournant dans le sens cyclonique, le cisaillement imposé par le disque vérifie  $\frac{\partial v_\theta}{\partial z} > 0$ .

Par conséquent :  $\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial r} < 0}$

Autrement dit, si on s'éloigne du centre, la densité diminue ce qui donne cette interface courbée vers le bas. Si le disque tourne dans le sens opposé, la courbure de l'interface est aussi dans l'autre sens.

Dans le cas d'un fluide à deux couches, la composante principale de la forme parabolique de l'interface  $h(r)$  est de type  $\frac{Ro}{Bu} r^2$ . Une expression complète de la forme de l'interface y compris en incluant des effets non linéaires et d'éventuelles forces de tension de surface est donnée par [Bradford \*et al.\* \(1981\)](#).

**Remarque :** l'effet de la force centrifuge sur la forme de l'interface est ici négligeable. Un calcul d'ordre de grandeur montre que pour les vitesses utilisées, la déformation due à cet effet ( $h = \frac{r^2 \Omega^2}{2\rho_2 g}$ ) est de l'ordre du micromètre.

## B. Annexe : Etude du rôle des couches latérales

Cette partie annexe présente les mesures expérimentales par PIV de vitesses angulaires pour un fluide stable dans le cas d'un cylindre à une couche et pour la configuration annulaire à deux couches. L'objectif de ces mesures est d'investiguer le rôle des couches latérales de Stewarston sur la vitesse du fluide intérieur. Un modèle simple basé sur un bilan de moments exercés sur le fluide intérieur et proposé initialement par [King \(1979\)](#) a été étendu par [Williams \*et al.\* \(2004a\)](#). Ainsi dans le cadre d'une collaboration avec ce dernier, cette partie présente une comparaison des résultats des mesures avec son modèle.

The relative motion of fluids in rotating tanks is opposed by viscous boundary layers at the lateral and horizontal boundaries. The influence of drag at the lateral boundaries is often tacitly assumed to be much weaker than at the horizontal boundaries, allowing the former to be neglected in analytical and numerical models. In the present study, the rationale behind this assumption is scrutinized, both analytically and experimentally. A simple equilibrium torque balance model, proposed by [Williams \*et al.\* \(2004a\)](#) applied to the one-layer and two-layer configurations of the rotating annulus, predicts that the drag torques at the lateral and horizontal boundaries may be comparable in magnitude. The effect of lateral boundaries depends on geometrical aspect ratio and radii ratio and Ekman number and can be expected large for experimental configurations with high aspect ratios and low rotation giving larger Ekman number. The model is compared with experimental results obtained in the laboratory using both a one-layer cylinder configuration and a two-layer salt-stratified rotating annulus.

### B.1. Introduction

Boundary layers are thin, viscous regions that develop wherever there is relative motion between a fluid and a boundary. They are regions of large shear, in which the relative fluid velocity is rapidly taken to zero at the boundary, in accordance with the no-slip and impermeability conditions (e.g. [Acheson, 1990](#)). In many rotating laboratory experiments, the boundary layers fall into two distinct categories (e.g. [Read, 1992](#)).

First, the layers that form at the horizontal boundaries (i.e. the base, lid, and any internal fluid interfaces) take their name from V. W. Ekman, who

first discussed them in the context of the wind-driven boundary layer at the surface of the ocean (Ekman, 1905). At solid boundaries and interfaces between immiscible fluids, their non-dimensional depth is  $E^{1/2}$ , where  $E$  is the Ekman number.

Second, the layers that form at the lateral boundaries (i.e. the vertical side-walls) take their name from K. Stewartson, and they fall into two sub-categories (Stewartson, 1957). One type serves to match the tangential component of the fluid velocity to the sidewall velocity, and has a non-dimensional width of  $E^{1/4}$ . The other type serves to match the vertical and normal components of the fluid velocity to the sidewall velocity, and has a non-dimensional width of  $E^{1/3}$ . The latter type also plays an essential role in providing a vertical mass flux between the upper and lower Ekman layers.

Boundary layers play a crucial role in the two mechanisms by which fluids adjust to rotational changes (Greenspan, 1968; Acheson, 1990). In one mechanism, linear spin up is achieved by the establishment of a secondary circulation in the radius–height plane. The secondary circulation is driven by the differential Ekman suction between the lower and upper Ekman layers, and is closed by the  $E^{1/3}$  Stewartson layers at the sidewalls. The actual spin up is due to weak radial velocities in the fluid interior : in order to conserve angular momentum, fluid parcels moving radially inwards under the influence of the secondary circulation must acquire a larger azimuthal velocity. The non-dimensional spin-up time of  $E^{-1/2}$  is the time required for all fluid parcels to be influenced by the secondary circulation. In the other mechanism, vorticity generated continuously at the lateral boundaries by the  $E^{1/4}$  Stewartson layers is communicated throughout the fluid by horizontal diffusion. The non-dimensional spin-up time of  $E^{-1}$  is the time required for all fluid parcels to be influenced by this vorticity diffusion.

The lateral frictional wall stresses associated with  $E^{1/4}$  Stewartson layers are frequently neglected without rigorous justification in analytical and numerical models of rotating laboratory experiments (e.g. Hart, 1972, 1973, 1981, 1985; Yoshida et al., 1986; Cattaneo et al., 1990; Lewis, 1992; Lovegrove et al., 2001, 2002; Williams et al., 2004a, 2009, 2010). The stresses may be neglected by replacing the physical no-slip boundary condition on the along-channel velocity at the sidewalls with an inviscid free-slip condition. However, the neglect of lateral boundary layer drag can significantly modify the flow. For example, Mundt et al. (1995) compare numerical simulations of a two-layer channel flow using no-slip and free-slip sidewall boundary conditions, and find that non-linear baroclinic instability is quite different in the two cases, because of non-linear Ekman suction effects near the outer sidewall. Also, Mundt et al. (1995) use numerical simulations to show that viscous sidewall boundary layers play a pivotal role in the dynamics.

In quasi-geostrophic models (e.g. Lewis, 1992; Williams et al., 2009), the  $E^{1/4}$  Stewartson layers are neglected more by necessity than choice. Quasi-geostrophic models have fewer dynamical degrees of freedom than Navier-Stokes models, meaning that only one boundary condition may be imposed at each sidewall.



Therefore, one of the two physical boundary conditions (impermeability and no-slip) must be discarded (Williams, 1979). Since impermeability is the more basic requirement, the no-slip condition is discarded, and the  $E^{1/4}$  Stewartson layers are neglected as a consequence.

On naïve grounds, the neglect of  $E^{1/4}$  Stewartson layers can be made to sound reasonable, for two independent (but flawed) reasons. First,  $E^{1/4}$  Stewartson layers are typically an order of magnitude thicker than Ekman layers at solid boundaries and immiscible interfaces. Therefore, the shear stress associated with  $E^{1/4}$  Stewartson layers is typically an order of magnitude weaker. However, the appropriate balance attained by the fluid in equilibrium is not a balance of shear stresses, but rather a balance of torques about the rotation axis. A torque is a stress, multiplied by the area over which the stress acts, multiplied by the distance from the rotation axis. Stewartson layers typically cover a greater area than Ekman layers, and the outer Stewartson layer is farther from the rotation axis. Therefore, the relatively small shear stress within an  $E^{1/4}$  Stewartson layer at the outer sidewall may be compensated, at least partially, by its relatively large area and radius. For this reason,  $E^{1/4}$  Stewartson layers may play a dynamically important role in the balance of positive and negative torques acting on the fluid in equilibrium, and may influence the basic state and its stability.

Second, spin-up due to the secondary Ekman circulation is typically a much faster process than spin-up due to the horizontal diffusion of vorticity (Acheson, 1990). However, this means only that  $E^{1/4}$  Stewartson layers do not play a dominant role in setting the time scale for the approach to equilibrium, not that they do not play a role in setting the equilibrium state itself. Correspondingly, the subject of this paper is the role of  $E^{1/4}$  Stewartson layers in the steady-state flow attained once the spin-up process is complete (and not the role of  $E^{1/3}$  Stewartson layers in the spin-up process, which is already well understood, as described above). In equilibrium, the angular acceleration of the fluid is zero, and so the net torque acting on the fluid at the boundaries must also be zero.

Note that the shear stresses within the fluid are zero at the transition between the viscous boundary layers and the inviscid interior, because the velocities tend smoothly to constant values as the interior is approached. Therefore, the boundary layers do not exert torques on the interior. However, the shear stresses are non-zero at the fluid's points of contact with the solid boundaries, because of the velocity gradients within the boundary layers. Therefore, the solid boundaries do exert torques on the entire body of fluid. The question we ask in the present paper is effectively : if the entire body of fluid, including the boundary layers, were a solid body acted upon by the same boundary torques, at what equilibrium rate would it rotate?

The present paper takes the rotating annular tank as a case study. The rotating annulus has been used extensively in the laboratory, to investigate flows of geophysical significance (e.g. Hide, 1977; Hignett *et al.*, 1985; Fröh *et al.*, 1997; Lovegrove *et al.*, 2000; Williams *et al.*, 2003, 2005; Read *et al.*, 2007; Flór, 2007; Williams *et al.*, 2008, 2010). Both the one-layer configuration with a

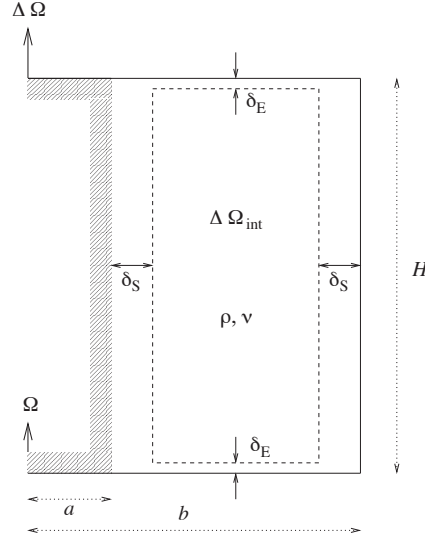
single homogeneous fluid, and the two-layer configuration with two stably stratified fluids (either miscible or immiscible), have been employed. In Section B.2 of this paper, a conceptual torque balance model for the one-layer rotating annulus is formulated. By writing down and solving a torque balance equation, the basic flow in the annulus is determined. The impacts of the  $E^{1/4}$  Stewartson layers on the equilibrium flow speed, and on the balance of torques, are assessed. In Section B.3, we extend the analysis to the two-layer annulus. In Section B.4, we perform laboratory experiments designed to test the torque model predictions, both in the one-layer cylinder case and in the two-layer salt-stratified rotating annulus. We conclude with a summary and discussion in Section B.5.

## B.2. Torque balance for the one-layer annulus

The one-layer rotating annulus to be analysed in this section is shown schematically in Figure B.1. It has inner radius  $a$ , outer radius  $b$ , and height  $H$ . It contains an incompressible homogeneous fluid of density  $\rho$  and kinematic viscosity  $\nu$ . The base and sidewalls rotate about the axis of symmetry, which is vertical, with angular velocity  $\Omega$ . The lid, which is in contact with the fluid, rotates relative to the base and sidewalls with angular velocity  $\Delta\Omega$ . Assuming that  $\Delta\Omega \ll \Omega$ , then the Taylor-Proudman theorem holds (e.g. Acheson, 1990) and the flow in the inviscid fluid interior is independent of depth. The interior rotates relative to the base and sidewalls with angular velocity  $\Delta\Omega_{\text{int}}$  (to be determined).

Surrounding the fluid interior are the Ekman and  $E^{1/4}$  Stewartson layers, whose (dimensional) widths,  $\delta_E$  and  $\delta_S$ , respectively, are independent of the vertical and radial co-ordinates and are given by standard formulae (e.g. Read, 1992). The horizontal and lateral boundaries exert torques on the entire body of fluid about the rotation axis, because the Ekman and  $E^{1/4}$  Stewartson layers contain vertical and radial shears in azimuthal velocity. The  $E^{1/3}$  Stewartson layers are not associated with torques about the rotation axis, because the radial shear in vertical velocity that they contain is parallel to the rotation axis. Therefore, the  $E^{1/3}$  Stewartson layers do not feature in the following torque balance analysis. Consequently, the label “Stewartson layers” will hereafter be used to refer to  $E^{1/4}$  Stewartson layers.

In Section B.2.1, we consider a simple torque balance equation for the fluid, including torques associated with the Ekman layers but neglecting torques associated with the Stewartson layers. We thereby calculate  $\Delta\Omega_{\text{int}}$  and the relative sizes of the contributions to the torque balance, in the absence of lateral boundary layer drag. The Stewartson layer torques are neglected in this exercise not because they are thought to be small, but because we wish to quantify the error due to their neglect. Correspondingly, in Section B.2.2, we repeat the analysis, this time including the drag torques associated with the Stewartson layers. We thereby assess the impact of lateral boundary layer drag on  $\Delta\Omega_{\text{int}}$  and the



**Fig B.1.:** *Schematic cross-section through the rotating one-layer annulus, showing the dimensions, fluid properties and rotation rates. The differential rotation rates,  $\Delta\Omega$  and  $\Delta\Omega_{\text{int}}$ , are defined relative to the frame of the base, which rotates at  $\Omega$ .*

relative sizes of the torques.

### B.2.1. Neglecting the Stewartson layers

Referring to Figure B.1, at radius  $r$ , the velocity difference across the Ekman layer at the lid is  $r(\Delta\Omega - \Delta\Omega_{\text{int}})$ , which is achieved over a width  $\delta_E$ . Assuming that the boundary layers are laminar and linear (the validity of these assumptions is discussed in Section B.5), then the shear stress exerted on the fluid by the lid is  $\rho\nu r(\Delta\Omega - \Delta\Omega_{\text{int}})/\delta_E$ . Multiplying by the area element,  $2\pi r dr$ , and by the distance from the rotation axis,  $r$ , and then integrating over radius from  $r = a$  to  $r = b$ , gives the torque on the fluid associated with this boundary layer to be

$$T_{\text{lid}}^{\text{Ekman}} = \frac{\pi\rho\nu(\Delta\Omega - \Delta\Omega_{\text{int}})(b^4 - a^4)}{2\delta_E}. \quad (\text{B.1})$$

In a similar manner, the torque on the fluid associated with the Ekman boundary layer at the base is found to be

$$T_{\text{base}}^{\text{Ekman}} = -\frac{\pi\rho\nu\Delta\Omega_{\text{int}}(b^4 - a^4)}{2\delta_E}. \quad (\text{B.2})$$

In equilibrium, the sum of the torques acting on the fluid must be zero, otherwise the fluid would experience a non-zero angular acceleration. For the moment, we neglect the retarding torques associated with the two Stewartson

layers, and consider a balance between the opposing torques associated with the Ekman layers at the lid and base. The torque balance equation in this case is

$$T_{\text{lid}}^{\text{Ekman}} + T_{\text{base}}^{\text{Ekman}} = 0 , \quad (\text{B.3})$$

which can be solved for  $\Delta\Omega_{\text{int}}$  to give

$$\Delta\Omega_{\text{int}} = \frac{\Delta\Omega}{2} , \quad (\text{B.4})$$

which is independent of the fluid properties and annulus dimensions. Therefore, the fluid rotates at the average speed of the lid and the base. The same result is obtained by [Acheson \(1990\)](#), in an analysis of the steady flow between two differentially rotating rigid horizontal boundaries of infinite extent.

### B.2.2. Including the Stewartson layers

We now improve the torque balance calculation by including the drag torques associated with the Stewartson layers, making the model a better representation of reality. Referring again to Figure B.1, the velocity difference across the Stewartson layer at the outer boundary is  $-b\Delta\Omega_{\text{int}}$ . This velocity difference gives a shear stress exerted on the fluid by the sidewall of  $-\rho\nu b\Delta\Omega_{\text{int}}/\delta_{\text{S}}$ . Multiplying by the area of the outer sidewall,  $2\pi bH$ , and by the distance from the rotation axis,  $b$ , gives the torque on the fluid associated with this boundary layer to be

$$T_{\text{outer}}^{\text{Stewartson}} = -\frac{2\pi\rho\nu\Delta\Omega_{\text{int}}Hb^3}{\delta_{\text{S}}} . \quad (\text{B.5})$$

In a similar manner, the torque on the fluid associated with the inner Stewartson boundary layer is found to be

$$T_{\text{inner}}^{\text{Stewartson}} = -\frac{2\pi\rho\nu\Delta\Omega_{\text{int}}Ha^3}{\delta_{\text{S}}} . \quad (\text{B.6})$$

The appropriate torque balance equation in this case is

$$T_{\text{lid}}^{\text{Ekman}} + T_{\text{base}}^{\text{Ekman}} + T_{\text{outer}}^{\text{Stewartson}} + T_{\text{inner}}^{\text{Stewartson}} = 0 , \quad (\text{B.7})$$

which represents a balance between the torque associated with the Ekman layer at the lid (which takes one sign) and the torques associated with the Ekman layer at the base and both of the Stewartson layers (which each take the opposite sign). Solving (B.7) for  $\Delta\Omega_{\text{int}}$  gives

$$\Delta\Omega_{\text{int}} = \frac{\Delta\Omega/2}{1 + 2[\delta_{\text{E}}/\delta_{\text{S}}][H(b^3 + a^3)/(b^4 - a^4)]} , \quad (\text{B.8})$$

which, unlike (B.4), depends upon the fluid properties, through the dimensionless ratio  $\delta_{\text{E}}/\delta_{\text{S}}$ , and upon the size of the annulus, through the dimensionless

reference(s)	$a$ (mm)	$b$ (mm)	$H$ (mm)	$\frac{H(b^3+a^3)}{(b^4-a^4)}$
Read <i>et al.</i> (2007)	2000	6500	550	0.1
Flór (2007)	250	1000	270	0.3
Fein (1973) Miller et Butler (1991) Lewis et Nagata (2004)	34.8	60.2	50	1.1
Hignett <i>et al.</i> (1985) Früh et Read (1997)	25	80	140	1.8
Hide (1977)	38	84	154	2.1
Carrigan (1978)	154	230	300	2.1
Lovegrove <i>et al.</i> (1999, 2000) Williams <i>et al.</i> (2003, 2005, 2008, 2010)	62.5	125	250	2.4
King (1979)	64	121	250	2.6

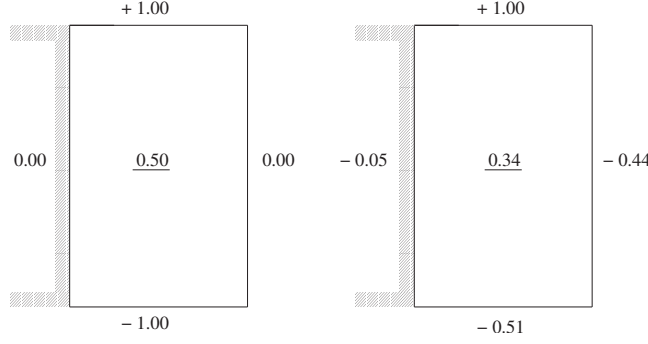
**Table B.1.:** *Values of the inner radius,  $a$ , outer radius,  $b$ , and height,  $H$ , used in typical rotating annulus laboratory experiments reported in the literature. The entries are ranked according to the size of the ratio  $H(b^3 + a^3)/(b^4 - a^4)$ , which appears in (B.8).*

ratio  $H(b^3 + a^3)/(b^4 - a^4)$ . The denominator in (B.8) is always positive and greater than unity, and so the inclusion of Stewartson layers in the analysis reduces the interior rotation rate compared to (B.4), because of the increased drag torque. The interior rotation rate given by (B.8) is a decreasing function of the annulus height,  $H$ , because as the height increases, so does the area of the lateral boundary over which the Stewartson drag stress acts.

We may now inquire, for a typical laboratory annulus used in the one-layer configuration, whether the dominant torque balance is between the Ekman layers at the lid and the base (the small- $H$  limit) or between the Ekman layer at the lid and the three remaining boundary layers (the large- $H$  limit). Table B.1 shows a survey of the dimensions of typical annulus facilities used in laboratory studies, as reported in the literature. Although  $H(b^3 + a^3)/(b^4 - a^4)$  takes values of around only 0.1 for warehouse-scale facilities, it takes values of 2 or greater for the much more commonly used office-scale facilities. For values this great, the fluid may lie outside the small- $H$  limit of negligible Stewartson layer drag.

As an example, taking  $H(b^3 + a^3)/(b^4 - a^4) = 2.4$  and  $\delta_E/\delta_S = 0.1$  in (B.8) gives  $\Delta\Omega_{\text{int}} = 0.68(\Delta\Omega/2)$ . Therefore, the interior rotation rate is reduced by over 30% because of the inclusion of Stewartson layer drag. Substituting this solution for  $\Delta\Omega_{\text{int}}$  into (B.7) allows us to evaluate the four contributory torques. The relative sizes,

$$T_{\text{lid}}^{\text{Ekman}} : T_{\text{base}}^{\text{Ekman}} : T_{\text{outer}}^{\text{Stewartson}} : T_{\text{inner}}^{\text{Stewartson}}, \quad (\text{B.9})$$



**Fig B.2.:** Breakdown of the boundary torques acting on the fluid when in equilibrium, for the typical one-layer annulus described in the text. Lateral boundary layer drag is neglected in the left diagram and included in the right diagram. In each case, the torques are normalized with respect to the torque at the lid. The equilibrium interior solid-body rotation rates are also given (underlined), as fractions of the lid rotation rate.

normalized with respect to  $T_{\text{lid}}^{\text{Ekman}}$ , are thereby found to be

$$+1.00 : -0.51 : -0.44 : -0.05 . \quad (\text{B.10})$$

Figure B.2 shows the four contributions to the torque balance, when the Stewartson layers are absent (equation B.3) and present (equation B.7). When the Stewartson layers are added, around half of the drag torque formerly provided by the base is taken up by the outer sidewall. With these annulus dimensions, the outer sidewall and base play approximately equal roles in balancing the torque from the lid, and the system is in neither the small- $H$  nor the large- $H$  limit. We conclude that neglect of lateral boundary layer drag, in models of a one-layer annulus of these dimensions, is unjustified.

### B.3. Torque balance for the two-layer annulus

In the two-layer extension to the torque balance calculation, the single homogeneous fluid shown in Figure B.1 is replaced with equal depths of two stably stratified homogeneous fluid layers. The two-layer analysis is conceptually no more difficult than the one-layer analysis, except for the addition of two new Ekman layers, one directly above and one directly below the internal fluid interface. The two fluid interiors, rotating at different rates, are coupled by the interfacial Ekman layers. Assuming no baroclinic instability or Kelvin-Helmholtz instability, the internal interface takes up an axisymmetric parabolic shape determined by the interior rotation rates. Therefore, the shear stresses associated with the interfacial Ekman layers act over an area that depends upon the interior rotation rates, making the two-layer torque balance calculation non-linear.



The torque balance equations take the form

$$T_{1, \text{ lid}}^{\text{Ekman}} + T_{1, \text{ interface}}^{\text{Ekman}} + T_{1, \text{ outer}}^{\text{Stewartson}} + T_{1, \text{ inner}}^{\text{Stewartson}} = 0 \quad (\text{B.11})$$

and

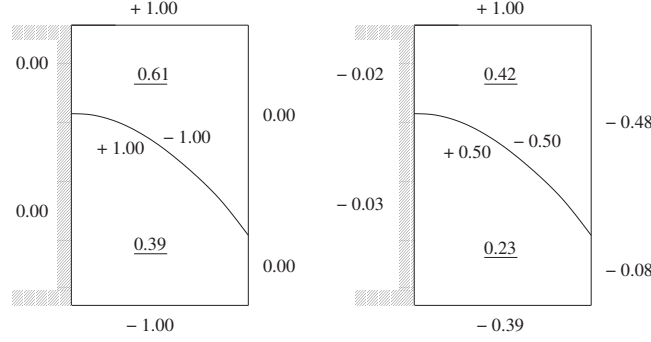
$$T_{2, \text{ base}}^{\text{Ekman}} + T_{2, \text{ interface}}^{\text{Ekman}} + T_{2, \text{ outer}}^{\text{Stewartson}} + T_{2, \text{ inner}}^{\text{Stewartson}} = 0, \quad (\text{B.12})$$

where the subscripts “1” and “2” refer to upper and lower layers, respectively. Explicit expressions for the eight torques appearing in (B.11) and (B.12) are omitted here, for convenience.

Torque balance models of the rotating two-layer annulus were studied by [King \(1979\)](#), who compared their predictions with laboratory measurements. Holding the turntable rotation rate constant in the laboratory, the rotation rate of the lower layer was measured for various values of the rotation rate of the lid. The rotation rate of the lower layer, as a fraction of the rotation rate of the lid, was thereby determined to be  $0.21 \pm 0.02$ . When the Stewartson layers were neglected, the torque balance model predicted a value of 0.31 for this ratio, a significant over-estimate. When the Stewartson layers were included, however, the predicted value was 0.18, in excellent agreement with the laboratory measurements.

Unfortunately, in order to make the torque balance approach analytically tractable, [King \(1979\)](#) assumed that the internal interface was horizontal. This assumption linearises the equations and yields an explicit analytical solution to (B.11) and (B.12), but severely limits the applicability of the model. Concomitantly, the laboratory comparison had to be performed with a density difference between the layers of 8%, which is an order of magnitude larger than that used in typical laboratory experiments. In contrast, the torque balance calculation used in the present study does not have this restriction, meaning that it can be applied to the laboratory experiments that are used in practice.

To obtain numerical solutions to the full non-linear coupled torque balance equations, (B.11) and (B.12), we use the converging iterative method proposed by [Williams \*et al.\* \(2004b\)](#). Figure B.3 shows the results of this calculation for a typical annulus containing two immiscible layers, both including and neglecting the Stewartson layer terms. The interior rotation rates are substantially reduced by the presence of the Stewartson layers, as expected. This reduction may influence the onset of Kelvin-Helmholtz instability and baroclinic instability ([Mundt \*et al.\*, 1995](#)). The proportion of the total drag torque contributed by the sidewalls is even greater in the two-layer system (61%) than in the one-layer system (49%), because of the large area and shear of the outer sidewall in the upper fluid. Note that the interfacial Ekman layer torques,  $T_{1, \text{ interface}}^{\text{Ekman}}$  and  $T_{2, \text{ interface}}^{\text{Ekman}}$ , are equal and opposite, as expected.



**Fig B.3.:** Breakdown of the boundary torques acting on the fluid when in equilibrium, for a typical annulus containing two immiscible layers. The annulus dimensions and the ratio  $\delta_E/\delta_S$  are the same as for Figure B.2, and the two layers are taken to have equal kinematic viscosities and a density difference of 0.6%, corresponding to the laboratory experiments of Williams et al. (2003, 2005, 2008, 2010). Lateral boundary layer drag is neglected in the left diagram and included in the right diagram. In each case, the torques are normalized with respect to the torque at the lid. The equilibrium interior solid-body rotation rates are also given (underlined), as fractions of the lid rotation rate.

## B.4. Laboratory experiments

### B.4.1. One-layer cylinder experiment

#### Experimental apparatus

To validate the torque balance model, we first conduct laboratory experiments using the one-layer cylinder configuration. The one-layer torque model balance in the annulus gives :

$$\Delta\Omega_{\text{int}} = \frac{\Delta\Omega}{2} \cdot \alpha \quad (\text{B.13})$$

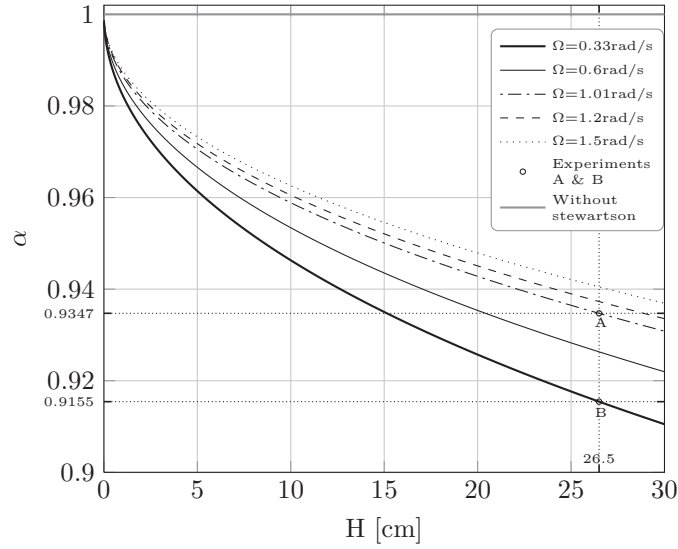
where

$$\alpha = \frac{1}{1 + 2\frac{\delta_e}{\delta_s} \cdot H \frac{b^3 + a^3}{b^4 - a^4}} \quad (\text{B.14})$$

As  $\delta_e$  is defined by  $\delta_e = \sqrt{\frac{\nu}{\Omega}}$  and  $\delta_s$  is given by :  $\delta_s = HE^{1/4}$  where  $E = \frac{\nu}{\Omega H^2}$ ,  $\alpha$  can also be written :

$$\alpha = \frac{1}{1 + 2\gamma E^{1/4} \left(1 - \frac{\Gamma}{1 + \Gamma^2}\right)} \quad (\text{B.15})$$

with the aspect ratio  $\gamma = \frac{H}{L}$  with  $L = b - a$  the annulus width and the radius ratio  $\Gamma = \frac{a}{b}$ .



**Fig B.4.:** Evolution of  $\alpha$  with  $H$  and  $\Omega$  given by the torque model for  $R=46.5\text{cm}$

Taking  $a=0$  and  $b=R$  gives  $L=R$  and for the one-layer cylinder configuration :

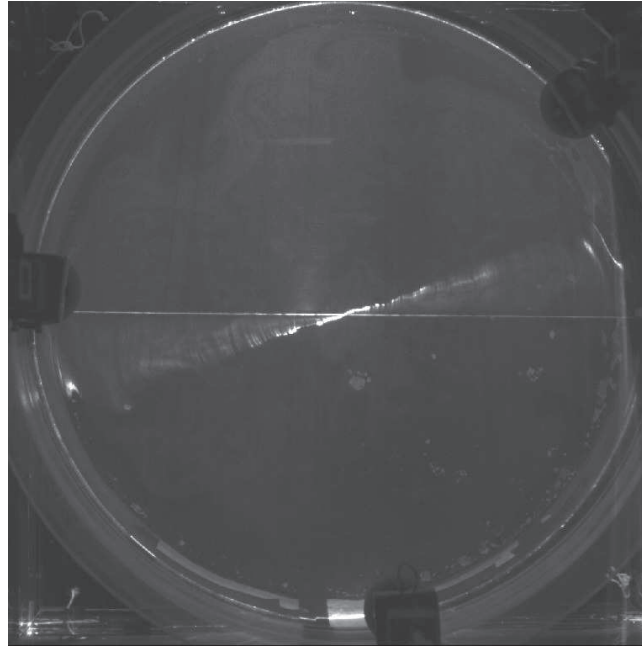
$$\alpha = \frac{1}{1 + 2\gamma E^{1/4}} \quad (\text{B.16})$$

The cylinder has a radius of  $R=46.5\text{cm}$  and the depth of fluid is taken at  $26.5\text{cm}$  as the effect of Stewartson layers for a given cylinder radius predicted by the torque model is greater for bigger  $H$  as illustrated in figure B.4.

Two series of experiments were conducted at a background cyclonic rotation  $\Omega$  of  $0.33$  and  $1.01$  rad/s for which the torque model predicts  $\alpha=0.9499$  and  $0.9617$  respectively (see figure B.4). Within the experimental series, the rotation of the disk at the top  $\Delta\Omega$  varies respectively from  $0.033$  to  $0.137$  rad/s and from  $0.033$  to  $0.208$  rad/s and in the same cyclonic direction. The Rossby number  $\frac{\Delta\Omega}{2\Omega}$  varies approximately in  $[0.01-0.2]$ , a range in which the formulae for the Ekman and Stewartson layers are valid. Moreover, in this range of Rossby number, no barotropic instability is expected.

Once the table and the disk are put to rotate, the fluid is let in this configuration for at least one hour in order to realize measurements in the steady-state configuration far from the spin-up regime.

The instantaneous profile of the azimuthal velocity is measured with the tin method similar to the one described by Honji (1975) or Taneda (1979) and which is a variant of the original tellurium method by Wortmann (1953) : a tin wire is tightened at mid-height in the fluid layer and constitutes the anode of an electrolytic circuit. A zinc cathode was positioned near the walls of the cylinder and attention was paid to weaken possible influence of the edges of the strip on the flow. By using electrolysis, tin hydroxide particles are advected by



**Fig B.5.:** *Instantaneous velocity profile observed with the advection of tin hydroxide particles produced by electrolysis with the tin method*

the flow and can be followed by illumination with an horizontal laser sheet as illustrated in figure B.5. By measuring the angular displacement, one can obtain the angular rotation in fluid  $\Delta\Omega_{\text{int measured}}$ .

### Experimental results

Table B.2 compares the experimental angular rotation in fluid with the predictions of torque model without and with Stewartson layers included. The experimental slope is obtained by linear fitting of experimental points (weighted least square fit) for each experimental series.

It can be seen that the fitting value is closer to the model without Stewartson

Exp serie	Slope of the weighted least square fit $y=a*x$	Prediction of the torque model	Model without stewartson layers
$\Omega = 1.01 \text{ rad/s}$ (A)	$0.974 \pm 2\%$	0.935	1
$\Omega = 0.33 \text{ rad/s}$ (B)	$0.979 \pm 2\%$	0.915	1

**Table B.2.:** *Table of the predictions and measurements by looking at  $\Delta\Omega_{\text{int}} = a \cdot \frac{\Delta\Omega}{2}$*

Exp serie	Slope of the unique weighted least square fit $y=a*x$	Prediction of the torque model	Model without Stewartson layers
Both series (A & B)	$1.051 \pm 2\%$	1	1.070 ( $\Omega=1.01$ rad/s) or 1.092 ( $\Omega=0.33$ rad/s)

**Table B.3.:** Table of the predictions and measurements by looking at  $\Delta\Omega_{int} = a \cdot \frac{\Delta\Omega}{2} \cdot \alpha$

layers than the prediction of the torque model with Stewartson layers included.

Table B.3 represents the same data but with a fit realized along  $x = \alpha\Delta\Omega/2$ . This enables to realise a unique fitting for both experimental series. The line  $1.051*x$  found is in the same way closer to lines corresponding to the torque model without Stewartson layers than to the  $y=x$  line corresponding to the torque model including Stewartson layers.

Thus it can be concluded that the measured angular velocities do not show a significant agreement with the Stewartson-layers included torque model and rather confirm the usual result that the rotation layer is half the rotation of the disk in the rotating frame of reference.

This makes the usual approximation of neglecting Stewartson layers at first order acceptable in our specific configuration.

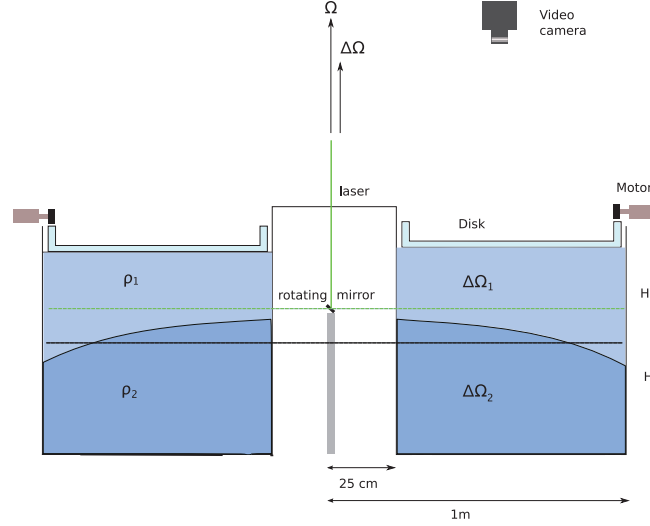
## B.4.2. Two-layer annulus experiments

### Experimental apparatus

We also conduct laboratory experiments using the rotating two-layer annulus shown in figure (B.6), a more challenging configuration with which to confront the model. The annulus has an inner boundary of radius  $a = 25$  cm and an outer boundary of radius  $b = 1$  m. The working fluid consists of two layers of salt-stratified water, of densities  $\rho_1$  and  $\rho_2 > \rho_1$  and common kinematic viscosity  $\nu$ . The layers have equal depths,  $H$ , and the total fluid depth,  $2H$ , varies between around 20 cm and 25 cm. The experiments consist of bringing the fluid into solid-body rotation at rate  $\Omega$ , and then starting the differential rotation of an annular lid (in contact with the fluid at the surface) at rate  $\Delta\Omega$ . The practical ranges are approximately  $0.08 < \Omega < 0.3$  rad s<sup>-1</sup> and  $0.07 < \Delta\Omega < 0.13$  rad s<sup>-1</sup>. Velocity measurements begin once the two layers are fully spun-up.

The torque balance theory applies only to axisymmetric flows, and so we must ensure that all instabilities to wave-like perturbations are forbidden. Kelvin-Helmholtz instability is excluded by limiting the Richardson number to values larger than 0.5. Similarly, baroclinic instability is excluded by limiting the rotational Froude number, defined by

$$F = \frac{4\Omega^2(b-a)^2}{g'H}, \quad (\text{B.17})$$



**Fig B.6.:** *Schematic cross-section through the rotating two-layer laboratory annulus used in the present paper. The curved black line indicates the parabolic interface inclination taken up between the two fluid layers when the lid rotation is cyclonic. The straight black line indicates the interface at rest. The green line indicates a typical path for the laser beam. The differential rotation rates,  $\Delta\Omega$ ,  $\Delta\Omega_1$  and  $\Delta\Omega_2$ , are defined relative to the frame of the base, which rotates at  $\Omega$ .*

to  $F < \pi^2/2$ , and by limiting the dissipation number, defined by

$$d = \frac{\sqrt{\nu\Omega}}{H\Delta\Omega}, \quad (\text{B.18})$$

to  $d > 0.02$  (see the regime diagrams in Williams *et al.*, 2005; Flór, 2007). In (B.17), the reduced gravity is defined by

$$g' = \frac{2g(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 + \rho_2}, \quad (\text{B.19})$$

where  $g$  is the gravitational constant. Since the experimental tank is relatively wide and shallow, the rotational Froude number is kept small by using small background rotation rates and large reduced gravities. With these constraints, the Rossby number, defined by

$$R = \frac{\Delta\Omega}{2\Omega}, \quad (\text{B.20})$$

ranges from around 0.1 to 0.5.

To visualize the flow in each layer, two types of particles of neutral buoyancy, with diameters of approximately  $20 \mu\text{m}$  and  $60 \mu\text{m}$ , are seeded in the fluid, and are found to sediment out over a relatively long time compared to the experimental runs. The horizontal plane of measurement is illuminated by a laser sheet



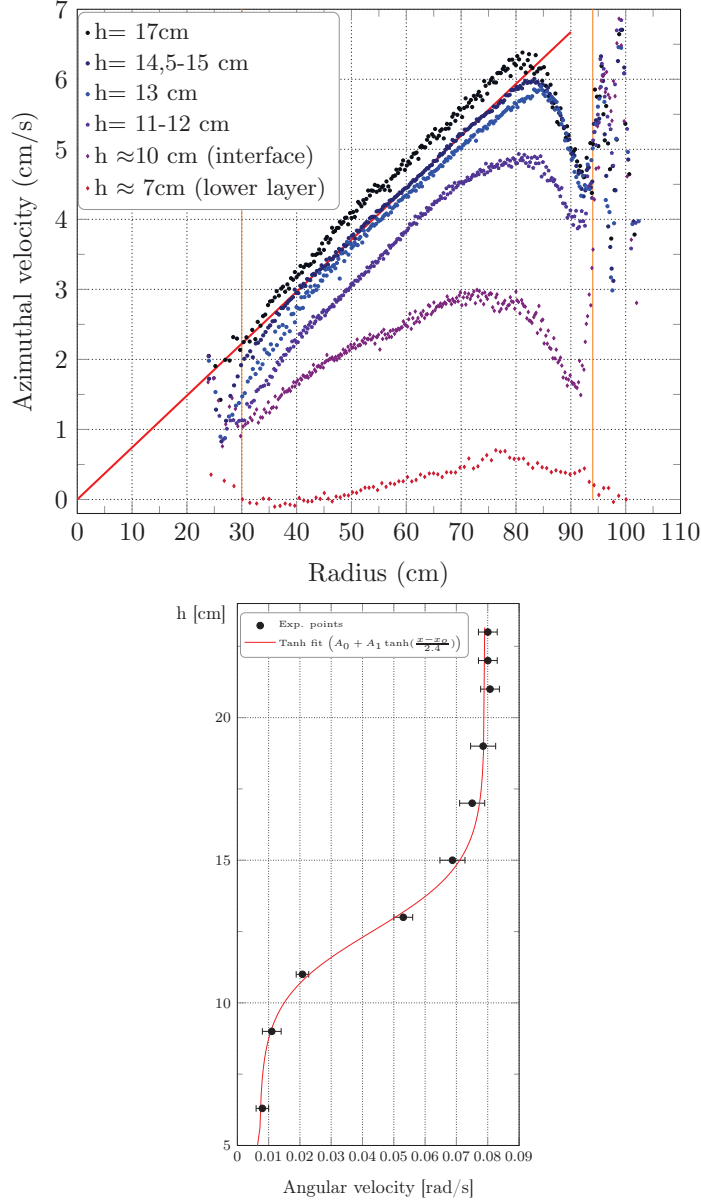
generated by a rapidly rotating mirror on the rotation axis. Images of a segment of the tank, of azimuthal extent  $120^\circ$ , are recorded with a black-and-white Dalsa 12-bit  $1000 \times 1000$ -pixel video camera with a frame rate (synchronised with the rotating mirror) of 14 Hz. Displacing the light sheet in the vertical direction allows the flow to be measured at different heights in the fluid. Horizontal velocity fields are calculated using the Correlation Imaging Velocimetry (CIV) method, which has been developed over the past decade at the Coriolis laboratory of the Laboratoire des Écoulements Géophysiques et Industriels (Fincham et Spedding, 1997; Fincham et Delerce, 2000). To increase accuracy, the azimuthal velocity field is averaged over an angle of  $120^\circ$  (corresponding to the width of images recorded by the camera) and over successive images in time.

In addition to the flow measurements, vertical density profiles are obtained by siphoning off small volumes of fluid at different heights and using an Anton Paar density meter, with a precision of 0.01%. Profiles are taken before, after and (in some cases) during the experiments. In all cases, a hyperbolic tangent density profile is found as a function of height. The profile is found to vary by only a few per cent over the duration of an experimental run, indicating negligible mixing.

Internal Ekman layers at the interface between immiscible fluids, in which the density interface thickness is set by the molecular scale, are well understood. For small Rossby numbers, the shear interface is confined to two Ekman layers—one on either side of the density interface—with thicknesses set by viscosity and background rotation (e.g. Read, 1992). In the present experiments with miscible fluids, however, the situation is more complicated (e.g. Hewitt *et al.*, 2001). The diffusion coefficients for the stratifying agent and the velocity,  $\kappa$  and  $\nu$ , are vastly different, as expressed by the Schmidt number, which for saline water is  $\nu/\kappa \approx 700$ . Therefore, density and momentum are diffused at different rates. From measurements in our annulus, we find that the density interface is typically 2–4 cm thick (i.e. 1–2 cm either side), and that the shear interface is typically 5–6 cm thick (i.e. 2.5–3 cm either side). Therefore, when we invoke the two-layer torque balance theory of Section B.3, we must use this measured shear thickness when computing torques at the interface, instead of the classical Ekman layer thickness for immiscible fluids.

According to theory, Ekman layers in continuously stratified fluids have a thickness of  $h_E = u_*/\sqrt{2\Omega N}$  (McWilliams *et al.*, 2009), where  $N$  is the buoyancy frequency and  $u_*$  is the shear stress velocity, which here is taken as the maximum upper-layer azimuthal velocity. For  $u_* = 6 \text{ cm s}^{-1}$  (see Figure B.7), this formula predicts an Ekman layer shear thickness in our annulus of  $h_E \approx 6 \text{ cm}$ , in excellent agreement with our observations. From dye visualizations, the secondary circulation in both layers is observed to be weak compared to the secondary circulation known for a single homogenous fluid.

Note that it is the value of  $h_E$  measured in the laboratory, and not the theoretical value inferred from  $u_*$ , that is used for the computation of the torque in what follows. Therefore, although the McWilliams *et al.* (2009) theory relating  $h_E$  and  $u_*$  is not exactly applicable to the laboratory scenario, there are no im-

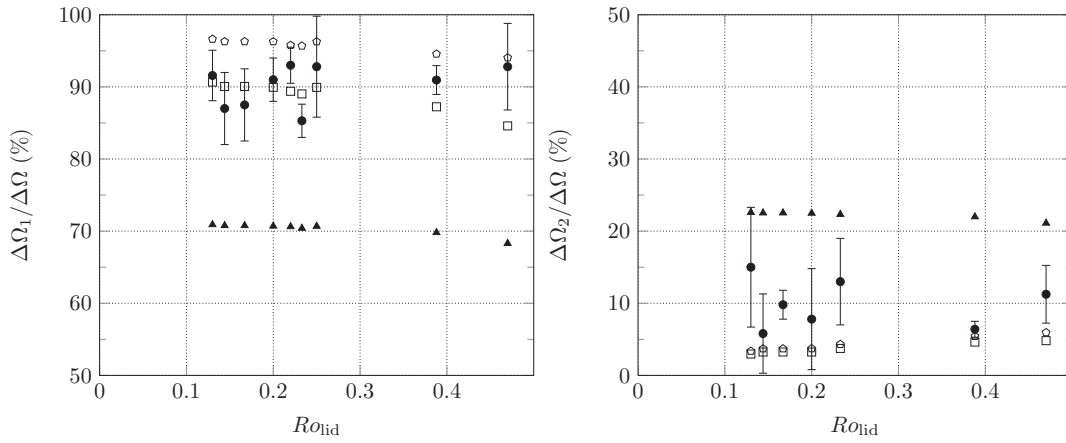


**Fig B.7.:** (a) Typical radial profiles of azimuthal velocity at six different heights above the base, measured during experiment 9 (see Table B.4). The profiles are averages, taken over an azimuthal angle of  $120^\circ$  and over 20 successive images each separated in time by 10 seconds. The vertical yellow lines delimit the range of radii within which the CIV technique returns reliable velocity fields. The red line is the line of best fit to the 14.5–15 cm data ; its slope yields the angular velocity at that height. (b) Typical vertical profile of angular velocity, obtained during experiment 3 (see Table B.4). The black circles denote the measured values and their error bars, obtained from lines of best fit such as that shown in (a). The red curve denotes a hyperbolic tangent curve of best fit. The limiting values of the hyperbolic tangent curve are taken to be the inferred upper-layer and lower-layer angular velocities, and are recorded in Table B.4 for each experiment.

plications for the ensuing torque calculation. We mention the theory merely to note that it gives excellent agreement with our observations, despite the slight formal inapplicability.

### Experimental results

Nine laboratory experiments have been performed using the rotating two-layer annulus shown in Figure B.6, at the parameter values listed in Table B.4. Typical radial profiles of azimuthal velocity, measured at different heights in the fluid, are shown in Figure B.7(a). To a good approximation, the azimuthal velocity increases linearly with radius across most of the tank (consistent with solid-body rotation) and decays to zero near the inner and outer boundaries. At any given height, the angular velocity may be calculated by computing the slope of the linear part of the velocity profile. The depth dependence of the angular velocity is shown in Figure B.7(b), and takes a hyperbolic tangent shape with a shear interface thickness of around 5 cm.



**Fig B.8.:** Angular velocities measured in the laboratory in (a) the upper layer and (b) the lower layer, expressed as fractions of the angular velocity of the lid, and plotted as functions of the Rossby number of the lid. The measured experimental values are shown (●), together with error bars derived from the standard deviations of measurements taken at different heights and times. Also shown are the corresponding theoretical predictions from the two-layer torque balance calculation of Section B.3, assuming immiscible fluids in which the interface shear is achieved over the classical Ekman layer thickness and including Stewartson drag (▲); assuming miscible fluids in which the interface shear is achieved over a total thickness of 5 cm and including Stewartson drag (□); and assuming miscible fluids in which the interface shear is achieved over a total thickness of 5 cm and neglecting Stewartson drag (◇).

Figure B.8 compares the experimentally measured angular velocities with theoretical predictions from the two-layer torque balance theory of Section B.3.

Expt no	$H$ (cm)	$\rho_1$ (g cm <sup>-3</sup> )	$\rho_2$ (g cm <sup>-3</sup> )	$\Delta\Omega$ (m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> )	$\Omega$ (rad s <sup>-1</sup> )	$g'$ (rad s <sup>-1</sup> )	$R$	$F$	$d$	$\Delta\Omega_1/\Delta\Omega$ (%)	$\Delta\Omega_2/\Delta\Omega$ (%)
1	10.0	1.0350	1.0890	0.084	0.190	0.4900	0.22	1.66	0.052	93.0 $\pm$ 2.5	-
2	10.0	1.0335	1.0880	0.084	0.310	0.5000	0.13	4.32	0.066	91.6 $\pm$ 3.5	15.0 $\pm$ 8.3
3	12.7	1.0063	1.0348	0.084	0.088	0.2700	0.47	0.51	0.028	92.8 $\pm$ 6.0	11.2 $\pm$ 4.0
4	10.0	1.0330	1.0890	0.084	0.108	0.5100	0.39	0.51	0.039	90.9 $\pm$ 2.0	6.4 $\pm$ 1.1
5	10.0	1.0330	1.0890	0.084	0.180	0.5100	0.23	1.43	0.050	85.3 $\pm$ 2.3	13.0 $\pm$ 6.0
6	10.2	1.0314	1.0882	0.100	0.251	0.5174	0.20	2.67	0.049	91.0 $\pm$ 3.0	7.8 $\pm$ 7.0
7	10.2	1.0314	1.0882	0.125	0.251	0.5174	0.25	2.67	0.039	92.8 $\pm$ 7.0	-
8	10.0	1.0326	1.0899	0.072	0.251	0.5280	0.14	2.72	0.069	87.0 $\pm$ 5.0	5.8 $\pm$ 5.5
9	10.0	1.0326	1.0899	0.084	0.251	0.5280	0.17	2.72	0.060	87.5 $\pm$ 5.0	9.8 $\pm$ 2.0

**Table B.4.:** Experimental parameters for the nine experiments conducted in this study, using the rotating two-layer annulus shown in Figure B.6. The layer heights, densities and rotation rates are stated. The quantities  $g'$ ,  $R$ ,  $F$  and  $d$  are calculated from equations (B.19), (B.20), (B.17) and (B.18), respectively. The right-most two columns show the observed rotation rates in the two fluid layers, measured as described in the text. (In experiments 1 and 7, the image quality was too poor for  $\Delta\Omega_2$  to be inferred.)

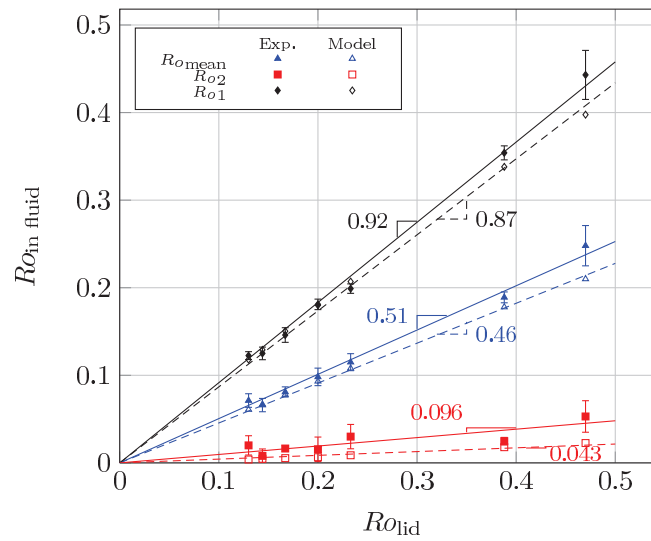
When iteratively solving (B.11) and (B.12) for the case of miscible fluids, we simply replace the classical Ekman layer thickness for immiscible fluids,  $\delta_E$ , with the Ekman layer thickness for continuously stratified fluids,  $h_E$ , in the formulae for  $T_{1, \text{interface}}^{\text{Ekman}}$  and  $T_{2, \text{interface}}^{\text{Ekman}}$  (but not in the formulae for  $T_{1, \text{lid}}^{\text{Ekman}}$  or  $T_{2, \text{base}}^{\text{Ekman}}$ ).

In the upper layer (Figure B.8a), the inappropriate assumption that the interfacial shear is achieved over the classical Ekman layer thickness for immiscible fluids produces theoretical predictions that are far too small, because the interfacial drag stress is over-estimated. In contrast, the assumption that the interfacial shear is achieved over a total thickness of 5 cm, i.e. 2.5 cm on either side, consistent with Figure B.7(b), produces theoretical predictions that are systematically too large if Stewartson-layer drag is neglected, but that are generally in good agreement with the experimental measurements if Stewartson-layer drag is included. Note that stronger refraction, at the steeper interfaces encountered at larger Rossby numbers, reduces the accuracy of the velocity measurements. The vertical transfer of horizontal momentum across the interface is greatly reduced when it occurs via a thick interface between two miscible layers, instead of a thin interface between two immiscible layers.

In the lower layer (Figure B.8b), similar results are found, except that the treatment of Stewartson layers makes little difference to the theoretical predictions. This insensitivity results from the basic parabolic interface shape, which is such that, in the lower layer, the Stewartson drag torque at the inner sidewall is weak because the radius is small, and the Stewartson drag torque at the outer sidewall is weak because the boundary area is small. In the lower layer, therefore, Stewartson drag stress has little effect on the torque balance.

The measured angular velocities in the lower layer (Figure B.8b) are systematically larger than the theoretical predictions obtained using an interfacial shear thickness of 5 cm. This observation may be explained by noting that, towards the outer sidewall, the vertical separation between the interface and the bottom boundary is reduced. Therefore, slightly lighter fluid at the interface can be efficiently entrained by the secondary Ekman circulation into the bottom Ekman layer, the thickness of which increases from the classical value to  $h_E = u_*/\sqrt{2\Omega N}$ . The frictional drag stress at the bottom boundary is then reduced, explaining the large measured angular velocities. This effect is much weaker in the upper layer, because of the larger distance between the lid and the interface. The effect increases with lid rotation and so may also explain the large variations measured for different Rossby numbers, seen in Figure B.8(b).

Finally, Figure B.9 plots the Rossby numbers measured separately in each layer, together with their mean (i.e. the interfacial Rossby number), as functions of the Rossby number of the lid. Each of the three fluid Rossby numbers is proportional to the lid Rossby number. The theoretical torque model predictions are also plotted, including Stewartson layers and using 5 cm for the total interface thickness. The experimental measurements are generally well predicted by the torque theory, although the agreement is slightly poorer for larger Rossby numbers, at which the Taylor-Proudman theorem begins to break down.



**Fig B.9.:** Rossby numbers of the upper layer ( $\Delta\Omega_1/2\Omega$ ), the lower layer ( $\Delta\Omega_2/2\Omega$ ), and the interface ( $[\Delta\Omega_1 + \Delta\Omega_2]/4\Omega$ ), plotted as functions of the Rossby number of the lid ( $\Delta\Omega/2\Omega$ ). The straight lines are the lines of best fit, and their slopes are indicated. The filled symbols and solid lines correspond to the experimentally measured values. The empty symbols and dashed lines correspond to the theoretical torque model predictions, including Stewartson layers and using 5 cm for the total interface thickness.



## B.5. Summary and discussion

This paper has scrutinized, using both theoretical analysis and laboratory experimentation, the rationale behind neglecting lateral boundary layer drag in rotating fluids.

First, by applying a simple equilibrium torque balance analysis to both the one-layer and the two-layer configurations of the rotating annulus, we evaluated the relative contributions to the torque balance from the Ekman layers and the  $E^{1/4}$  Stewartson layers. For typical laboratory annulus dimensions, the theoretical approach based on the torque balance suggests that drag torques associated with the outer Stewartson layer and the bottom Ekman layer could be comparable in magnitude, and that the interior rotation rates could be significantly reduced by the drag torque associated with the Stewartson layers.

In two complementary series of both one-layer cylinder experiment and two-layer salt-stratified rotating annulus experiment, we tested the torque balance model including Stewartson layers predictions by measuring angular velocities. The effect of Stewartson layers is found not visible in the one-layer configuration which gives justification to the usual approximation of neglecting Stewartson layers at first order. However, the prediction of the torque model including Stewartson layers was found to be in the best agreement with measurements in the two-layer annulus configuration provided the accurate internal thickness for interfacial shear is used even if the torque model without Stewartson layers is in good agreement too. Thus, we found only a weak effect of Stewartson layers in the experimental configurations. Apparently the fluid brought in rotation in the Ekman layers is transported through the Stewartson layers, making a boundary layer that applies less drag than a regular non rotating boundary would do. As a consequence there is a small amount of drag applied by the side wall boundaries to the fluid. For a tank geometry with an aspect ratio  $H/R$  larger than 1 however, the effect of the Ekman layers on the fluid will be reduced and as a consequence, the torque by the Stewartson layers will increase; the drag model is expected to become relevant. With our miscible fluids, vertical density differences across the internal interface are gradually transported into the interfacial Ekman layers, increasing the shear thickness. Therefore, the torques at the internal interface are greatly reduced, and the relative importance of Stewartson layer drag is increased. At the rotating lid, the vertical density gradients are negligible, resulting in a thin Ekman layer and large momentum transport from the lid to the upper fluid layer. In contrast, at the internal interface, the vertical density gradients are large, resulting in a thick Ekman layer and weak momentum transport from the upper fluid layer to the lower fluid layer. This weak transport leads to upper-layer angular velocities much higher than would occur in an immiscible two-layer fluid. These results may give insight into the vertical transport of horizontal momentum across density interfaces in geophysical flows, such as at the atmosphere-ocean boundary and in the ocean interior.

Lateral boundary layer drag torques vary as the cube of the radius, and so the inner Stewartson layer does not significantly contribute compared to the outer Stewartson layer. Therefore, our conclusions apply equally to two-layer open cylinder experiments with no inner sidewall, such as those used by Hart (1972, 1973, 1981, 1985) and Bradford *et al.* (1981). Also, our findings may help explain why baroclinic instability waves are observed to propagate slower in laboratory experiments than in numerical simulations that neglect lateral boundary drag (Williams *et al.*, 2010).

The axisymmetric equilibrium flow analysed in this paper should be amenable to a full high-resolution numerical solution, especially in the laminar flow regime. However, simple conceptual models such as that presented herein remain valuable, for their ability to isolate the key mechanisms and elucidate the relevant concepts. Furthermore, such models play an important role in suggesting future avenues for direct numerical simulations and laboratory experiments.

We close with a brief discussion of the limitations of the torque balance model. The shear stress formulae assume linear profiles of velocity across the boundary layers. This is a simple assumption that captures the first-order effects of the boundary layers, as is usual in conceptual models. The torque balance analysis could potentially be improved by using the detailed analytical solutions for the velocity profiles, to capture the higher-order effects. Also, we have assumed that the boundary layers are laminar. Boundary layers may develop instabilities and become turbulent, and there is an extensive literature on the criteria for turbulence in such flows (e.g. Lilly, 1966; Lingwood, 1997; Séverac *et al.*, 2007). However, in two-layer annulus experiments observed using a sophisticated high-resolution flow visualization technique, there is no evidence of turbulence or instabilities in the boundary layers (e.g. Williams *et al.*, 2003, 2005, 2008, 2010). Therefore, the assumption of laminar boundary layers also appears to be reasonable.

Eventually, Stewartson layers could be included in numerical models of rotating annulus laboratory experiments, if quantitative agreement is sought even if the effect of Stewartson layers was found weak in the present experimental configurations. An alternative solution would be to remove the Stewartson layers from the laboratory experiment, by designing stress-free sidewalls that rotate with the fluid, although this approach brings many practical difficulties that may be impossible to overcome. The impact of lateral boundaries is stronger for taller tanks, and so the results presented herein make a case for designing shallower laboratory experiments wherever possible, if the influence of lateral boundary layer drag forces is to be minimised.

The authors gratefully acknowledge the helpful suggestions of two anonymous reviewers. PDW is funded through a University Research Fellowship from the Royal Society (reference : UF080256). J-BF acknowledges funding from the Royal Society, making exchange visits possible. J-BF and HS acknowledge funding for the laboratory experiments from the French ANR contract FLOWING.

# Bibliographie

- ACHESON D.J., 1990. *Elementary Fluid Dynamics*. Oxford University Press.
- AFANASYEV Y., 2003. Spontaneous Emission of Gravity Waves by Interacting Vortex Dipoles in a Stratified Fluid : Laboratory Experiments. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 97 :79–95. doi:[10.1080/0309192031000114349](https://doi.org/10.1080/0309192031000114349).
- AFANASYEV Y.D., RHINES P.B. ET LINDAHL E.G., 2008. Emission of Inertial Waves by Baroclinically Unstable Flows : Laboratory Experiments with Altimetric Imaging Velocimetry. *Journal of Atmospheric Sciences*, 65 :250–+. doi:[10.1175/2007JAS2336.1](https://doi.org/10.1175/2007JAS2336.1).
- ALEXAKIS A., 2005. On Holmboe’s instability for smooth shear and density profiles. *Physics of Fluids*, 17, 8 :084103–+. doi:[10.1063/1.2001567](https://doi.org/10.1063/1.2001567).
- ALEXAKIS A., 2007. Marginally unstable Holmboe modes. *Physics of Fluids*, 19, 5 :054105–+. doi:[10.1063/1.2730545](https://doi.org/10.1063/1.2730545).
- ALEXAKIS A., 2009. Stratified shear flow instabilities at large Richardson numbers. *Physics of Fluids*, 21, 5 :054108–+. doi:[10.1063/1.3147934](https://doi.org/10.1063/1.3147934).
- APPLEBY J., 1982. *Comparative theoretical and experiment studies of baroclinic waves in a two-layer system*. Thèse de doctorat, Leeds University, UK.
- BAINES P.G. ET MITSUDERA H., 1994. On the mechanism of shear flow instabilities. *Journal of Fluid Mechanics*, 276 :327–342. doi:[10.1017/S0022112094002582](https://doi.org/10.1017/S0022112094002582).
- BARTH J.A., 1989a. Stability of a coastal upwelling front 1. Model developing and a stability theorem. *Journal of Geophysical Research*, 94 :10844–10856. doi:[10.1029/JC094iC08p10844](https://doi.org/10.1029/JC094iC08p10844).
- BARTH J.A., 1989b. Stability of a coastal upwelling front 2. Model results and comparison with observations. *Journal of Geophysical Research*, 94 :10857–10883. doi:[10.1029/JC094iC08p10857](https://doi.org/10.1029/JC094iC08p10857).
- BASTIN M.E. ET READ P.L., 1997. A laboratory study of baroclinic waves and turbulence in an internally heated rotating fluid annulus with sloping endwalls. *Journal of Fluid Mechanics*, 339 :173–198.

- BATCHELOR G.K., 1959. Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid. Part 1. General discussion and the case of small conductivity. *Journal of Fluid Mechanics*, 5 :113–133. doi:[10.1017/S002211205900009X](https://doi.org/10.1017/S002211205900009X).
- BOURUET-AUBERTOT P. ET ECHEVIN V., 2002. The influence of the coast on the dynamics of upwelling fronts : Part ii. numerical simulations. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, 36, 1-3 :175 – 200. ISSN 0377-0265. doi:[DOI : 10.1016/S0377-0265\(02\)00030-1](https://doi.org/10.1016/S0377-0265(02)00030-1).
- BOURUET-AUBERTOT P. ET LINDEN P.F., 2002. The influence of the coast on the dynamics of upwelling fronts : Part i. laboratory experiments. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, 36, 1-3 :153 – 173. ISSN 0377-0265. doi:[DOI : 10.1016/S0377-0265\(02\)00029-5](https://doi.org/10.1016/S0377-0265(02)00029-5).
- BRADFORD J., BERMAN A.S. ET LUNDGREN T.S., 1981. Non-geostrophic baroclinic instability in a two-fluid layer rotating system. *Journal of Atmospheric Sciences*, 38 :1376–1389. doi:[10.1175/1520-0469\(1981\)038<1376 :NBIIAT>2.0.CO ;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1981)038<1376 :NBIIAT>2.0.CO ;2).
- BRADY P. T. AND HERRMAN M. ET LOPEZ J., 2011. Two-fluid confined flow in a cylinder driven by a rotating endwall. (*under consideration for jfm*).
- BUCH JR. K.A. ET DAHM W.J.A., 1996. Experimental study of the fine-scale structure of conserved scalar mixing in turbulent shear flows. Part 1.  $Sc > 1$ . *Journal of Fluid Mechanics*, 317 :21–71. doi:[10.1017/S0022112096000651](https://doi.org/10.1017/S0022112096000651).
- BÜHLER O. ET MCINTYRE M.E., 2005. Wave capture and wave-vortex duality. *J. Fluid Mech.*, 534 :67–95.
- CAIRNS R.A., 1979. The role of negative energy waves in some instabilities of parallel flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 92 :1–14. doi:[10.1017/S0022112079000495](https://doi.org/10.1017/S0022112079000495).
- CARPENTER J., 2009. *Unstable waves on a sheared density interface*. Thèse de doctorat, University of British Columbia, Vancouver.
- CARPENTER J., BALMFORTH N. ET LAWRENCE G., 2010. Identifying unstable modes in stratified shear layers. *Phys. of Fluids*, 22 :054104.
- CARRIGAN C.R., 1978. Instability of a two-layer baroclinic flow in a channel. *Tellus*, 30 :468–471.
- CATTANEO F. ET HART J.E., 1990. Multiple states for quasi-geostrophic channel flows. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 54 :1–33.
- CHANDRASEKHAR S., 1961. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. International Series of Monographs on Physics, Oxford : Clarendon, 1961.

- CHARNEY J., 1947. The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current. *J. Meteor.*, 4 :135–162.
- CHIA F., GRIFFITHS R.W. ET LINDEN P.F., 1982. Laboratory experiments on fronts Part II : The formation of cyclonic eddies at upwelling fronts. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 19 :189–206. doi:[10.1080/03091928208208955](https://doi.org/10.1080/03091928208208955).
- CUSHMAN-ROISIN B., 1986. Frontal Geostrophic Dynamics. *Journal of Physical Oceanography*, 16 :132–143. doi:[10.1175/1520-0485\(1986\)016<0132:FGD>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1986)016<0132:FGD>2.0.CO;2).
- CUSHMAN-ROISIN B., 1994. *Introduction to geophysical fluid dynamics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. ISBN 0-13-353301-8.
- DAVIERO G.J., ROBERTS P.J.W. ET MAILE K., 2001. Refractive index matching in large-scale stratified experiments. *Experiments in Fluids*, 31 :119–126.
- EADY E., 1949. Long waves and cyclone waves. *Tellus*, 1 :33–52.
- ECCLES F.J.R., READ P.L., CASTREJÓN-PITA A.A. ET HAINE T.W.N., 2009. Synchronization of modulated traveling baroclinic waves in a periodically forced, rotating fluid annulus. *Phys. Rev. E*, 79, 1 :015202. doi:[10.1103/PhysRevE.79.015202](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.79.015202).
- EKMAN V.W., 1905. On the influence of the Earth's rotation on ocean currents. *Ark. Math. Astr. Fys.*, 2 :1–52.
- FEIN J., 1973. An experimental study of the effects of the upper boundary condition on the thermal convection in a rotating cylindrical annulus of water. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 5 :213–248.
- FINCHAM A. ET DELERCE G., 2000. Advanced optimization of correlation imaging velocimetry algorithms. *Experiments in Fluids*, 29, 7 :13–22.
- FINCHAM A.M. ET SPEDDING G.R., 1997. Low cost, high resolution DPIV for measurement of turbulent fluid flow. *Experiments in Fluids*, 23, 6 :449–462.
- FLIERL G.R., 1988. On the instability of geostrophic vortices. *Journal of Fluid Mechanics*, 197 :349–388. doi:[10.1017/S0022112088003283](https://doi.org/10.1017/S0022112088003283).
- FLÓR J., SCOLAN H. ET GULA J., 2011. Frontal instabilities and waves in a differentially rotating fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 685 :532–542. doi:[10.1017/jfm.2011.338](https://doi.org/10.1017/jfm.2011.338).
- FLÓR J.B., 2007. Frontal instability, inertia-gravity wave radiation and vortex formation. CFM Stratified Flow Symposium, 18ème Congrès Français de Mécanique, Grenoble, 27–31 August 2007.

- <http://documents.irevues.inist.fr/bitstream/2042/15609/1/CFM2007-1093.pdf>.
- FLÓR J.B., BUSH J.W.M. ET UNGARISH M., 2004. An experimental investigation of spin-up from rest in of a stratified fluid. *Geophys. Fluid Dyn*, 98, 4 :277–296.
- FORD R., 1994. Gravity wave radiation from vortex trains in rotating shallow water. *J. Fluid Mech.*, 281 :81–118.
- FOWLIS W. W. HIDE R., 1965. Thermal Convection in a Rotating Annulus of Liquid : Effect of Viscosity on the Transition Between Axisymmetric and Non-Axisymmetric Flow Regimes. *Journal of Atmospheric Sciences*, 22 :541–558. doi:[10.1175/1520-0469\(1965\)022<0541:TClARA>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1965)022<0541:TClARA>2.0.CO;2).
- FRITTS D.C. ET ALEXANDER M.J., 2003. Gravity wave dynamics and effects in the middle atmosphere. *Reviews of Geophysics*, 41 :1003. doi:[10.1029/2001RG000106](https://doi.org/10.1029/2001RG000106).
- FRITTS D.C. ET NASTROM G.D., 1992. Sources of Mesoscale Variability of Gravity Waves. Part II : Frontal, Convective, and Jet Stream Excitation. *Journal of Atmospheric Sciences*, 49 :111–127. doi:[10.1175/1520-0469\(1992\)049<0111:SOMVOG>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1992)049<0111:SOMVOG>2.0.CO;2).
- FRÜH W.G. ET READ P.L., 1997. Wave interactions and the transition to chaos of baroclinic waves in a thermally driven rotating annulus. *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A*, 355 :101–153. doi:[10.1098/rsta.1997.0003](https://doi.org/10.1098/rsta.1997.0003).
- FULTZ D., LONG R.R., OWENS G.V., BOHAN W., KAYLOR R. ET WEIL J., 1959. Studies of thermal convection in a rotating cylinder with some implications for large-scale atmospheric motions. *Meteorol Monographs*.
- GHIL M., READ P. ET SMITH L., 2010. Geophysical flows as dynamical systems : the influence of Hide's experiments. *Astronomy and Geophysics*, 51, 4 :040000–4. doi:[10.1111/j.1468-4004.2010.51428.x](https://doi.org/10.1111/j.1468-4004.2010.51428.x).
- GREENSPAN H.P., 1968. *The theory of rotating fluids*. Cambridge University Press.
- GRIFFITHS M. ET REEDER M.J., 1996. Stratospheric inertia gravity waves generated in a numerical model of frontogenesis. I : Model solutions. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 122 :1153–1174. doi:[10.1002/qj.49712253307](https://doi.org/10.1002/qj.49712253307).
- GRIFFITHS R. ET LINDEN P., 1981a. The stability of buoyancy-driven coastal currents. *Dyn. of Atmos. Oceans*, 5, 4 :281 – 306. ISSN 0377-0265. doi:[DOI : 10.1016/0377-0265\(81\)90004-X](https://doi.org/10.1016/0377-0265(81)90004-X).



- GRIFFITHS R.W., KILLWORTH P.D. ET STERN M.E., 1982. Ageostrophic instability of ocean currents. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 117, -1 :343–377. doi:[10.1017/S0022112082001669](https://doi.org/10.1017/S0022112082001669).
- GRIFFITHS R.W. ET LINDEN P.F., 1981b. The stability of vortices in a rotating, stratified fluid. *J. Fluid Mech.*, 105, -1 :283–316. doi:[10.1017/S0022112081003212](https://doi.org/10.1017/S0022112081003212).
- GRIFFITHS R.W. ET LINDEN P.F., 1982. Laboratory experiments on fronts Part I : Density-Driven Boundary Currents. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 19 :159–187. doi:[10.1080/03091928208208954](https://doi.org/10.1080/03091928208208954).
- GULA J., 2009. *Instabilités agéostrophiques des écoulements baroclines dans l'atmosphère et dans l'océan et leur évolution non-linéaire*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- GULA J., PLOUGONVEN R. ET ZEITLIN V., 2009a. Ageostrophic instabilities of fronts in a channel in a stratified rotating fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 627 :485–+. doi:[10.1017/S0022112009006508](https://doi.org/10.1017/S0022112009006508).
- GULA J. ET ZEITLIN V., 2010. Instabilities of buoyancy-driven coastal currents and their nonlinear evolution in the two-layer rotating shallow-water model. part 1. passive lower layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 659 :69–93. doi:[10.1017/S0022112010002405](https://doi.org/10.1017/S0022112010002405).
- GULA J., ZEITLIN V. ET BOUCHUT F., 2010. Instabilities of buoyancy-driven coastal currents and their nonlinear evolution in the two-layer rotating shallow water model. Part 2. Active lower layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 665 :209–237. doi:[10.1017/S0022112010003903](https://doi.org/10.1017/S0022112010003903).
- GULA J., ZEITLIN V. ET PLOUGONVEN R., 2009b. Instabilities of two-layer shallow-water flows with vertical shear in the rotating annulus. *Journal of Fluid Mechanics*, 638 :27–+. doi:[10.1017/S0022112009990796](https://doi.org/10.1017/S0022112009990796).
- HART J., 1979. Finite amplitude baroclinic instability. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 11 :147–172.
- HART J., 1980. An experimental study of nonlinear baroclinic instability and mode selection in a large basin. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, 4 :115–135. doi:[10.1016/0377-0265\(80\)90003-2](https://doi.org/10.1016/0377-0265(80)90003-2).
- HART J.E., 1972. A laboratory study of baroclinic instability. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 3 :181–209. doi:[10.1080/03091927208236080](https://doi.org/10.1080/03091927208236080).
- HART J.E., 1973. On the behaviour of large-amplitude baroclinic waves. *J. Atmos. Sci.*, 30 :1017–1034.

- HART J.E., 1974. On the Mixed Stability Program for Quasi-Geostrophic Ocean Currents. *Journal of Physical Oceanography*, 4 :349–356. doi:[10.1175/1520-0485\(1974\)004<0349:OTMSPF>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1974)004<0349:OTMSPF>2.0.CO;2).
- HART J.E., 1976. The Modulation of an Unstable Baroclinic Wave Field. *Journal of Atmospheric Sciences*, 33 :1874–1889. doi:[10.1175/1520-0469\(1976\)033<1874:TMOAUB>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1976)033<1874:TMOAUB>2.0.CO;2).
- HART J.E., 1981. Wavenumber selection in nonlinear baroclinic instability. *J. Atmos. Sci.*, 38 :400–408.
- HART J.E., 1985. A laboratory study of baroclinic chaos on the f-plane. *Tellus Series A*, 37 :286–+. doi:[10.1111/j.1600-0870.1985.tb00428.x](https://doi.org/10.1111/j.1600-0870.1985.tb00428.x).
- HAYASHI Y.Y. ET YOUNG W.R., 1987. Stable and unstable shear modes of rotating parallel flows in shallow water. *Journal of Fluid Mechanics*, 184 :477–504. doi:[10.1017/S0022112087002982](https://doi.org/10.1017/S0022112087002982).
- HAZEL P., 1972. Numerical studies of the stability of inviscid stratified shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 51 :39–61. doi:[10.1017/S0022112072001065](https://doi.org/10.1017/S0022112072001065).
- HEWITT R.E., FOSTER M.R. ET DAVIES P.A., 2001. Spin-up of a two-layer rotating stratified fluid in a variable-depth container. *Journal of Fluid Mechanics*, 438 :379–407.
- HIDE R., 1953. Some experiments on thermal convection in a rotating liquid. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 79, 339 :161–161. ISSN 1477-870X. doi:[10.1002/qj.49707933916](https://doi.org/10.1002/qj.49707933916).
- HIDE R., 1958. An Experimental Study of Thermal Convection in a Rotating Liquid. *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A*, 250 :441–478. doi:[10.1098/rsta.1958.0004](https://doi.org/10.1098/rsta.1958.0004).
- HIDE R., 1977. Experiments with rotating fluids. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 103, 435 :1–28.
- HIDE R., LEWIS S.R. ET READ P.L., 1994. Sloping convection : A paradigm for large-scale waves and eddies in planetary atmospheres? *Chaos*, 4 :135–162. doi:[10.1063/1.166000](https://doi.org/10.1063/1.166000).
- HIDE R. ET MASON P.J., 1970. Baroclinic Waves in a Rotating Fluid Subject to Internal Heating. *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A*, 268 :201–232. doi:[10.1098/rsta.1970.0073](https://doi.org/10.1098/rsta.1970.0073).
- HIGNETT P., WHITE A.A., CARTER R.D., JACKSON W.D.N. ET SMALL R.M., 1985. A comparison of laboratory measurements and numerical simulations of baroclinic wave flows in a rotating cylindrical annulus. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 111 :131–154.

- HOLFORD J., 1994. *The evolution of a front. Ph. D. thesis, DAMTP, Cambridge University.* Thèse de doctorat, DAMTP, Cambridge University.
- HOLTON J.R., 1992. *An introduction to dynamic meteorology 3rd edition.* Academic Press, San Diego :, 3rd ed. édition.
- HONJI H., 1975. The starting flow down a step. *Journal of Fluid Mechanics*, 69 :229–240. doi:[10.1017/S0022112075001413](https://doi.org/10.1017/S0022112075001413).
- HOSKINS B.J., MCINTYRE M.E. ET ROBERTSON A.W., 1985. On the use and significance of isentropic potential vorticity maps. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 111 :877–946. doi:[10.1002/qj.49711147002](https://doi.org/10.1002/qj.49711147002).
- HOWARD L.N., 1961. Note on a paper of John W. Miles. *Journal of Fluid Mechanics*, 10 :509–512. doi:[10.1017/S0022112061000317](https://doi.org/10.1017/S0022112061000317).
- HÖLMBÖE J., 1962. On the behavior of symmetric waves in stratified shear layers. *Geofys.Publ.*, 24 :67–112. doi:[10.1063/1.2001567](https://doi.org/10.1063/1.2001567).
- IGA K., 1993. Reconsideration of Orlanski's instability theory of frontal waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 255 :213–236. doi:[10.1017/S0022112093002460](https://doi.org/10.1017/S0022112093002460).
- JOHNSON G.C. ET OHLSEN D.R., 1994. Frictionally Modified Rotating Hydraulic Channel Exchange and Ocean Outflows. *Journal of Physical Oceanography*, 24 :66–78. doi:[10.1175/1520-0485\(1994\)024<0066:FM-RHCE>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1994)024<0066:FM-RHCE>2.0.CO;2).
- KILLWORTH P.D., 1980. Barotropic and baroclinic instability in rotating stratified fluids. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, 4 :143–184. doi:[10.1016/0377-0265\(80\)90013-5](https://doi.org/10.1016/0377-0265(80)90013-5).
- KILLWORTH P.D., PALDOR N. ET STERN M.E., 1984. Wave propagation and growth on a surface front in a two-layer geostrophic current. *Journal of Marine Research*, 42 :761–785(25). doi:[doi:10.1357/002224084788520701](https://doi.org/10.1357/002224084788520701).
- KILLWORTH P.D. ET STERN M.E., 1982. Instabilities on density-driven boundary currents and fronts. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 22 :1–28. doi:[10.1080/03091928208221734](https://doi.org/10.1080/03091928208221734).
- KING J.C., 1979. An experimental study of baroclinic wave interactions in a two-layer system. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 13 :153–167. doi:[10.1080/03091927908243767](https://doi.org/10.1080/03091927908243767).
- KING J.C., 1979. *Instabilities and nonlinear wave interactions in a two-layer rotating fluid.* Thèse de doctorat, University of Leeds.
- KLOOSTERZIEL R.C., CARNEVALE G.F. ET ORLANDI P., 2007. Inertial instability in rotating and stratified fluids : barotropic vortices. *Journal of Fluid Mechanics*, 583 :379–+. doi:[10.1017/S0022112007006325](https://doi.org/10.1017/S0022112007006325).

- KLOOSTERZIEL R.C. ET VAN HEIJST G.J.F., 1991. An experimental study of unstable barotropic vortices in a rotating fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 223 :1–24. doi:[10.1017/S0022112091001301](https://doi.org/10.1017/S0022112091001301).
- KUBOKAWA A., 1986. Instability caused by the coalescence of two modes of a one-layer coastal current with a surface front. *Journal of the Oceanographical Society of Japan*, 42, 5 :373–380. doi:[10.1007/BF02110432](https://doi.org/10.1007/BF02110432).
- KUBOKAWA A., 1988. Instability and nonlinear evolution of a density-driven coastal current with a surface front in a two-layer ocean. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 40 :195–223. doi:[10.1080/03091928808208825](https://doi.org/10.1080/03091928808208825).
- LAWRENCE G.A., BROWAND F.K. ET REDEKOPP L.G., 1991. The stability of a sheared density interface. *Physics of Fluids*, 3 :2360–2370. doi:[10.1063/1.858175](https://doi.org/10.1063/1.858175).
- LEBLOND P.H. ET MYSAK L.A., 1978. *Waves in the ocean*. Elsevier Scientific Pub. Co.; distributors for the U.S. and Canada, Elsevier/North Holland, Amsterdam; New York : New York :. ISBN 0444416021.
- LEWIS G.M. ET NAGATA W., 2004. Linear stability analysis for the differentially heated rotating annulus. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 98, 2 :129–152.
- LEWIS S.R., 1992. A quasi-geostrophic numerical model of a rotating internally heated fluid. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 65 :31–55.
- LIGHTHILL J.M., 1952. On sound generated aerodynamically, I. General theory. *Proc. Roy. Soc. London*, 211 (A) :564–587.
- LILLY D.K., 1966. On the instability of Ekman boundary flow. *J. Atmos. Sci.*, 23 :481–494.
- LINDEN P.F. ET VAN HEIJST G.J.F., 1984. Two-layer spin-up and frontogenesis. *Journal of Fluid Mechanics*, 143 :69–94.
- LINGWOOD R.J., 1997. Absolute instability of the Ekman layer and related rotating flows. *J. Fluid Mech.*, 331 :405–428.
- LOPEZ J.M. ET MARQUES F., 2010. Sidewall boundary layer instabilities in a rapidly rotating cylinder driven by a differentially corotating lid. *Physics of Fluids*, 22, 11 :114109–+. doi:[10.1063/1.3517292](https://doi.org/10.1063/1.3517292).
- LOVEGROVE A.F., MOROZ I.M. ET READ P.L., 2001. Bifurcations and instabilities in rotating two-layer fluids : I. f-plane. *Non. Proc. Geophys.*, 8 :21–36.
- LOVEGROVE A.F., MOROZ I.M. ET READ P.L., 2002. Bifurcations and instabilities in rotating two-layer fluids : II.  $\beta$ -plane. *Non. Proc. Geophys.*, 9 :289–309.

- LOVEGROVE A.F., READ P.L. ET RICHARDS C.J., 1999. Generation of inertia-gravity waves by a time-dependent baroclinic wave in the laboratory. *Physics and Chemistry of the Earth B*, 24 :455–460. doi:[10.1016/S1464-1909\(99\)00028-3](https://doi.org/10.1016/S1464-1909(99)00028-3).
- LOVEGROVE A.F., READ P.L. ET RICHARDS C.J., 2000. Generation of inertia-gravity waves in a baroclinically unstable fluid. *Q. J. R. Met. Soc.*, 126 :3233–3254.
- MAELAND E., 1982. A steady source-sink flow in a two-layer rotating fluid. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 21 :75–88. doi:[10.1080/03091928208209006](https://doi.org/10.1080/03091928208209006).
- MARINONE S.G. ET RIPA P., 1984. Energetics of the instability of a depth independent equatorial jet. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 30 :105–130. doi:[10.1080/03091928408210079](https://doi.org/10.1080/03091928408210079).
- MCINTYRE M.E., 2009. Spontaneous Imbalance and Hybrid Vortex-Gravity Structures. *Journal of Atmospheric Sciences*, 66 :1315–+. doi:[10.1175/2008JAS2538.1](https://doi.org/10.1175/2008JAS2538.1).
- MCWILLIAMS J.C., HUCKLE E. ET SHCHEPETKIN A.F., 2009. Buoyancy effects in a stratified Ekman layer. *J. Phys. Oceanogr.*, 39, 10 :2581–2599.
- MILES J.W., 1961. On the stability of heterogeneous shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 10 :496–508. doi:[10.1017/S0022112061000305](https://doi.org/10.1017/S0022112061000305).
- MILES J.W., 1963. On the stability of heterogeneous shear flows. Part 2. *Journal of Fluid Mechanics*, 16 :209–227. doi:[10.1017/S0022112063000707](https://doi.org/10.1017/S0022112063000707).
- MILLER T.L. ET BUTLER K.A., 1991. Hysteresis and the transition between axisymmetric flow and wave flow in the baroclinic annulus. *J. Atmos. Sci.*, 48, 6 :811–823.
- MUNDT M.D., BRUMMELL N.H. ET HART J.E., 1995. Linear and nonlinear baroclinic instability with rigid sidewalls. *J. Fluid Mech.*, 291 :109–138.
- MUNDT M.D., HART J.E. ET OHLSEN D.R., 1995. Symmetry, sidewalls, and the transition to chaos in baroclinic systems. *J. Fluid Mech.*, 300 :311–388.
- NARIMOUSA S. ET MAXWORTHY T., 1987. Coastal upwelling on a sloping bottom : the formation of plumes, jets and pinched-off cyclones. *Journal of Fluid Mechanics*, 176 :169–190. doi:[10.1017/S0022112087000612](https://doi.org/10.1017/S0022112087000612).
- NIHOUL J. ET JAMART B., 1989. *Mesoscale/synoptic coherent structures in geophysical turbulence : proceedings of the 20th International Liège Colloquium on Ocean Hydrodynamics*. Elsevier oceanography series. Elsevier. ISBN 9780444874702.

- OHLSSEN D.R. ET HART J.E., 1989. The transition to baroclinic chaos on the beta-plane. *Journal of Fluid Mechanics*, 203 :23–50. doi:[10.1017/S0022112089001369](https://doi.org/10.1017/S0022112089001369).
- ORLANSKI I., 1968. Instability of Frontal Waves. *Journal of Atmospheric Sciences*, 25 :178–200. doi:[10.1175/1520-0469\(1968\)025<0178 :IOFW>2.0.CO ;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1968)025<0178 :IOFW>2.0.CO ;2).
- ORTIZ S., CHOMAZ J. ET LOISELEUX T., 2002. Spatial holmboe instability. *Phys. of Fluids*, 14 :2585–2597.
- O’SULLIVAN D. ET DUNKERTON T.J., 1995. Generation of inertia-gravity waves in a simulated life cycle of baroclinic instability. *J. Atmos. Sci.*, 52 :3695–3716.
- PALDOR N. ET GHIL M., 1990. Finite-Wavelength Instabilities of a Coupled Density Front. *Journal of Physical Oceanography*, 20 :114–124. doi:[10.1175/1520-0485\(1990\)020<0114 :FWIOAC>2.0.CO ;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1990)020<0114 :FWIOAC>2.0.CO ;2).
- PALDOR N. ET GHIL M., 1991. Shortwave instabilities of coastal currents. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 58 :225–241. doi:[10.1080/03091929108227340](https://doi.org/10.1080/03091929108227340).
- PAVELIN E., WHITEWAY J.A. ET VAUGHAN G., 2001. Observation of gravity wave generation and breaking in the lowermost stratosphere. *Journal of geophysical research*, 106 :5173–5180. doi:[10.1029/2000JD900480](https://doi.org/10.1029/2000JD900480).
- PEDLOSKY J., 1964. The Stability of Currents in the Atmosphere and the Ocean : Part I. *Journal of Atmospheric Sciences*, 21 :201–219. doi:[10.1175/1520-0469\(1964\)021<0201 :TSOCIT>2.0.CO ;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1964)021<0201 :TSOCIT>2.0.CO ;2).
- PEDLOSKY J., 1970. Finite-Amplitude Baroclinic Waves. *Journal of Atmospheric Sciences*, 27 :15–30. doi:[10.1175/1520-0469\(1970\)027<0015 :FABW>2.0.CO ;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1970)027<0015 :FABW>2.0.CO ;2).
- PEDLOSKY J., 2001. *Geophysical Fluid Dynamics*, tome 2nd ed. 1987. Corr. 2nd printing, 1987, XIV, 728 p. Springer.
- PEDLOSKY J., 2003. *Waves in the ocean and atmosphere : introduction to wave dynamics*. Springer. ISBN 9783540003403.
- PHILLIPS N.A., 1954. Energy Transformations and Meridional Circulations associated with simple Baroclinic Waves in a two-level, Quasi-geostrophic Model. *Tellus*, 6 :273–286.
- PIANI C., DURRAN D., ALEXANDER M.J. ET HOLTON J.R., 2000. A Numerical Study of Three-Dimensional Gravity Waves Triggered by Deep Tropical



- Convection and Their Role in the Dynamics of the QBO. *Journal of Atmospheric Sciences*, 57 :3689–3702. doi:[10.1175/1520-0469\(2000\)057<3689:AN-SOTD>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(2000)057<3689:AN-SOTD>2.0.CO;2).
- POUGONVEN R., 2010. *Emission d'ondes de gravité par les jets atmosphériques*. Habilitation à diriger des recherches, Université Pierre et Marie-Curie - Paris 6, France.
- POUGONVEN R., MURAKI D.J. ET SNYDER C., 2005. A Baroclinic Instability that Couples Balanced Motions and Gravity Waves. *Journal of Atmospheric Sciences*, 62 :1545–1559. doi:[10.1175/JAS3426.1](https://doi.org/10.1175/JAS3426.1).
- POUGONVEN R. ET SNYDER C., 2005. Gravity waves excited by jet : Propagation versus generation. *Geoph. Res. Lett.*, 32, L18802 :doi :10.1029/1005GL023730.
- POUGONVEN R. ET SNYDER C., 2007. Inertia Gravity Waves Spontaneously Generated by Jets and Fronts. Part I : Different Baroclinic Life Cycles. *Journal of Atmospheric Sciences*, 64 :2502–+. doi:[10.1175/JAS3953.1](https://doi.org/10.1175/JAS3953.1).
- POUGONVEN R., TEITELBAUM H. ET ZEITLIN V., 2003. Inertia gravity wave generation by the tropospheric midlatitude jet as given by the Fronts and Atlantic Storm-Track Experiment radio soundings. *Journal of Geophysical Research*, 108, D21 :4686.
- POUGONVEN R. ET ZEITLIN V., 2002. Internal gravity wave emission from a pancake vortex :an example of wave-vortex interaction in strongly stratified flows. *Phys. of Fluids*, 14 :1259–1268.
- POULIQUEN O., CHOMAZ J.M. ET HUERRE P., 1994. Propagating Holmboe waves at the interface between two immiscible fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 266 :277–302. doi:[10.1017/S002211209400100X](https://doi.org/10.1017/S002211209400100X).
- RAHMANI M., 2011. *Kelvin-Helmholtz instabilities in sheared density stratified flows*. Thèse de doctorat, University of British Columbia, Vancouver.
- READ P.L., 1992. *Rotating fluids in geophysical and industrial applications* (editor : Hopfinger, E. J.), chapitre III.1 *Dynamics and instabilities of Ekman and Stewartson layers*, pages 49–84. Springer-Verlag.
- READ P.L., BELL M.J., JOHNSON D.W. ET SMALL R.M., 1992. Quasi-periodic and chaotic flow regimes in a thermally driven, rotating fluid annulus. *Journal of Fluid Mechanics*, 238 :599–632. doi:[10.1017/S0022112092001836](https://doi.org/10.1017/S0022112092001836).
- READ P.L., YAMAZAKI Y.H., LEWIS S.R., WILLIAMS P.D., WORDSWORTH R., MIKI-YAMAZAKI K., SOMMERIA J. ET DIDELLE H., 2007. Dynamics of convectively driven banded jets in the laboratory. *J. Atmos. Sci.*, 64, 11 :4031–4052.

- REZNIK G.M., ZEITLIN V. ET BEN JELLOUL M., 2001. Nonlinear theory of geostrophic adjustment. Part 1. Rotating shallow-water model. *Journal of Fluid Mechanics*, 445 :93–120.
- RIEDINGER X., 2009. *Instabilité radiative d'un tourbillon dans un fluide stratifié*. Thèse de doctorat, Université de Provence, Aix-Marseille.
- RIPA P., 1991. General stability conditions for a multi-layer model. *Journal of Fluid Mechanics*, 222 :119–137. doi:[10.1017/S0022112091001027](https://doi.org/10.1017/S0022112091001027).
- SAKAI S., 1989. Rossby-Kelvin instability : a new type of ageostrophic instability caused by a resonance between Rossby waves and gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 202 :149–176.
- SCHECTER D., 2008. The spontaneous imbalance of an atmospheric vortex at high rossby number. *Journal of Atmospheric Sciences*, 65 :2498–2521. doi:[10.1175/2007JAS2490.1](https://doi.org/10.1175/2007JAS2490.1).
- SCHERER E. ET ZEITLIN V., 2008. Instability of coupled geostrophic density fronts and its nonlinear evolution. *Journal of Fluid Mechanics*, 613 :309–327. doi:[10.1017/S0022112008003145](https://doi.org/10.1017/S0022112008003145).
- SCOLAN H., VERZICCO R. ET FLOR J.B., 2011. On density interfaces in rotating fluids. VII International Symposium on Stratified Flows, Rome, Italy.
- SÉVERAC E., PONCET S., SERRE E. ET CHAUVE M.P., 2007. Large eddy simulation and measurements of turbulent enclosed rotor-stator flows. *Physics of Fluids*, 19, 8 :085113.
- SNYDER C., MURAKI D.J., PLOUGONVEN R. ET ZHANG F., 2007. Inertia Gravity Waves Generated within a Dipole Vortex. *Journal of Atmospheric Sciences*, 64 :4417–+. doi:[10.1175/2007JAS2351.1](https://doi.org/10.1175/2007JAS2351.1).
- SNYDER C., SKAMAROCK W.C. ET ROTUNNO R., 1993. Frontal Dynamics near and following Frontal Collapse. *Journal of Atmospheric Sciences*, 50 :3194–3212. doi:[10.1175/1520-0469\(1993\)050<3194:FDNAFF>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1993)050<3194:FDNAFF>2.0.CO;2).
- SONG I.S., CHUN H.Y. ET LANE T.P., 2003. Generation Mechanisms of Convectively Forced Internal Gravity Waves and Their Propagation to the Stratosphere. *Journal of Atmospheric Sciences*, 60 :1960–1980. doi:[10.1175/1520-0469\(2003\)060<1960:GMOCFI>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(2003)060<1960:GMOCFI>2.0.CO;2).
- SPENCE G., FOSTER M. ET DAVIES P., 1992. The transient response of a contained rotating stratified fluid to impulsively started surface forcing. *J. Fluid Mech.*, 243 :33–50. doi:[10.1017/S0022112092002623](https://doi.org/10.1017/S0022112092002623).

- STEGNER A., BOUROUET-AUBERTOT P. ET PICHON T., 2004. Nonlinear adjustment of density fronts. part 1. the rossby scenario and the experimental reality. *J. Fluid Mech.*, 502, -1 :335–360. doi:[10.1017/S002211200300781X](https://doi.org/10.1017/S002211200300781X).
- STEWARTSON K., 1957. On almost rigid rotations. *J. Fluid Mech.*, 3 :17–26.
- SWARZTRAUBER P.N., 1974. A direct Method for the Discrete Solution of Separable Elliptic Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 11 :1136–1150. doi:[10.1137/0711086](https://doi.org/10.1137/0711086).
- TANEDA S., 1979. Visualization of Separating Stokes Flows. *Journal of the Physical Society of Japan*, 46 :1935–+.
- TEDFORD E.W., CARPENTER J.R., PAWLOWICZ R., PIETERS R. ET LAWRENCE G.A., 2009. Observation and analysis of shear instability in the Fraser River estuary. *Journal of Geophysical Research (Oceans)*, 114, C13 :C11006. doi:[10.1029/2009JC005313](https://doi.org/10.1029/2009JC005313).
- THIVOLLE-CAZAT E., 2003. *Modélisation en laboratoire de l'instabilité d'un tourbillon barocline et d'un courant côtier de gravité*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- UCCELLINI L.W. ET KOCH S.E., 1987. The Synoptic Setting and Possible Energy Sources for Mesoscale Wave Disturbances. *Monthly Weather Review*, 115 :721–+. doi:[10.1175/1520-0493\(1987\)115<0721:TSSAPE>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0493(1987)115<0721:TSSAPE>2.0.CO;2).
- VALLIS G.K., 2006. *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K.
- VAN HEIJST G.J.F., 1983. The shear-layer structure in a rotating fluid near a differentially rotating sidewall. *Journal of Fluid Mechanics*, 130 :1–12.
- VAN HEIJST G.J.F., 1984. Frontal upwelling in a rotating two-layer fluid. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 29 :139–153. doi:[10.1080/03091928408248187](https://doi.org/10.1080/03091928408248187).
- VAN TUYL A.H. ET YOUNG J.A., 1982. Numerical Simulation of Nonlinear Jet Streak Adjustment. *Monthly Weather Review*, 110 :2038–+. doi:[10.1175/1520-0493\(1982\)110<2038:NSONJS>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0493(1982)110<2038:NSONJS>2.0.CO;2).
- VANNESTE J. ET YAVNEH I., 2004. Exponentially Small Inertia Gravity Waves and the Breakdown of Quasigeostrophic Balance. *Journal of Atmospheric Sciences*, 61 :211–223. doi:[10.1175/1520-0469\(2004\)061<0211:ESI-WAT>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(2004)061<0211:ESI-WAT>2.0.CO;2).
- VANNESTE J. ET YAVNEH I., 2007. Unbalanced instabilities of rapidly rotating stratified shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 584 :373–+. doi:[10.1017/S002211200700643X](https://doi.org/10.1017/S002211200700643X).

- VERZICCO R. ET CAMUSSI R., 1997. Transitional regimes of low-Prandtl thermal convection in a cylindrical cell. *Physics of Fluids*, 9 :1287–1295. doi:[10.1063/1.869244](https://doi.org/10.1063/1.869244).
- VERZICCO R., LALLI F. ET CAMPANA E., 1997. Dynamics of baroclinic vortices in a rotating, stratified fluid : A numerical study. *Physics of Fluids*, 9 :419–432. doi:[10.1063/1.869136](https://doi.org/10.1063/1.869136).
- VERZICCO R. ET ORLANDI P., 1996. A finite-difference scheme for three-dimensional incompressible flows in cylindrical coordinates. *Journal of Computational Physics*, 123, 2 :402 – 414. ISSN 0021-9991. doi:[DOI : 10.1006/jcph.1996.0033](https://doi.org/10.1006/jcph.1996.0033).
- VIÚDEZ Á., 2006. Spiral patterns of inertia gravity waves in geophysical flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 562 :73–82. doi:[10.1017/S0022112006001182](https://doi.org/10.1017/S0022112006001182).
- WILLIAMS G.P., 1979. Planetary circulations : 2. The Jovian quasi-geostrophic regime. *J. Atmos. Sci.*, 36 :932–968.
- WILLIAMS P., 2003. *Nonlinear interactions of fast and slow modes in rotating, stratified fluid flows*. Thèse de doctorat, University of Oxford, Oxford.
- WILLIAMS P.D., HAINE T.W.N. ET READ P.L., 2004a. Stochastic resonance in a nonlinear model of a rotating, stratified shear flow, with a simple stochastic inertia-gravity wave parameterization. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 11 :127–135.
- WILLIAMS P.D., HAINE T.W.N. ET READ P.L., 2005. On the generation mechanisms of short-scale unbalanced modes in rotating two-layer flows with vertical shear. *Journal of Fluid Mechanics*, 528 :1–22. doi:[10.1017/S0022112004002873](https://doi.org/10.1017/S0022112004002873).
- WILLIAMS P.D., HAINE T.W.N. ET READ P.L., 2008. Inertia-Gravity Waves Emitted from Balanced Flow : Observations, Properties, and Consequences. *Journal of Atmospheric Sciences*, 65 :3543–+. doi:[10.1175/2008JAS2480.1](https://doi.org/10.1175/2008JAS2480.1).
- WILLIAMS P.D., HAINE T.W.N., READ P.L., LEWIS S.R. ET YAMAZAKI Y.H., 2009. QUAGMIRE v1.3 : a quasi-geostrophic model for investigating rotating fluids experiments. *Geoscientific Model Development*, 2, 1 :13–32.
- WILLIAMS P.D., READ P L. ET HAINE T.W.N., 2010. Testing the limits of quasi-geostrophic theory : application to observed laboratory flows outside the quasi-geostrophic regime. *J. Fluid Mech.*, 649 :187–203.
- WILLIAMS P.D., READ P.L. ET HAINE T.W.N., 2003. Spontaneous generation and impact of inertia-gravity waves in a stratified, two-layer shear flow. *Geophysical Research Letters*, 30, 24 :240000–1. doi:[10.1029/2003GL018498](https://doi.org/10.1029/2003GL018498).

- WILLIAMS P.D., READ P.L. ET HAINE T.W.N., 2004b. A calibrated, non-invasive method for measuring the internal interface height field at high resolution in the rotating, two-layer annulus. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 98 :453–471. doi:[10.1080/03091920412331296366](https://doi.org/10.1080/03091920412331296366).
- WIRTH A., 2010. On the Ekman Spiral with an Anisotropic Eddy Viscosity. *Boundary-Layer Meteorology*, 137 :327–331. doi:[10.1007/s10546-010-9527-7](https://doi.org/10.1007/s10546-010-9527-7).
- WORTMANN F.X., 1953. Eine Methode zur Beobachtung und Messung von Wasserströmungen mit Tellur. *Zeitschr. f. angew. Physik*.
- YOSHIDA A. ET HART J.E., 1986. A numerical study of baroclinic chaos. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 37 :1–56.
- ZHANG F., 2004. Generation of Mesoscale Gravity Waves in Upper-Tropospheric Jet Front Systems. *Journal of Atmospheric Sciences*, 61 :440–457. doi:[10.1175/1520-0469\(2004\)061<0440 :GOMGWI>2.0.CO ;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(2004)061<0440 :GOMGWI>2.0.CO ;2).